韋達公式在解題上的應用

柯宏源

國立彰化高級中學

壹、前言

根，由代數基本定理可以知道一個複係數n次多項式方程式會有n個複數根，而在一些競賽中常常遇到一些與根相關的特殊求值問題，當遇到此類題型時，首先考慮的工具往往是韋達定理(根與係數)，透過韋達定理可以列出許多代數恆等式，像是在參考資料 1 中便有提及。然而有些題型無法輕易拆解成韋達定理的公式型式，例如根的高冪次和，甚至有些題型需引入虛數i與ω解題，此篇文章收錄了與根相關的競賽題型以及韋達定理的延伸應用，以下將從韋達定理的基本應用談起。

貳、從問題 1 的解答談起

一、韋達定理的基本應用

考慮一多項式$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，首項係數$a_n \neq 0$，令$n$個根分別為$x_1$、$x_2$、 … 、$x_n$，則根與係數滿足關係式:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ (x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n) + \cdots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \cdots \\ x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

也就是任取k個根相乘的和會等於$(-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$。此根與係數的關係即為「韋達定理」(Vieta's formula)。

以下將透過乘法公式將一些特殊齊次輪換式拆解成滿足韋達定理的公式型式，再透過韋達定理求解。

1.$\boldsymbol{n}$次多項式$\boldsymbol{f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}$求根的平方、倒數和

a.利用韋達定理求根的平方和

$$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)$$

$$=\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2-2\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

b.利用韋達定理求根的倒數和

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{x_2x_3\ldots x_n+x_1x_3\ldots x_n+\cdots+x_1x_2\ldots x_{n-1}}{x_1x_2\ldots x_n}$$

再利用前面的韋達定理，即可求得根的倒數和:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}}{(-1)^n\frac{a_0}{a_n}}=-\frac{a_1}{a_0}$$

2.三次多項式$\boldsymbol{f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}$求根的倒數平方、立方和

a.利用韋達定理求根的倒數平方和

$$\frac{1}{x_1{}^2}+\frac{1}{x_2{}^2}+\frac{1}{x_3{}^2}=\frac{x_2{}^2x_3{}^2+x_1{}^2x_3{}^2+x_1{}^2x_2{}^2}{(x_1x_2x_3)^2}$$

$$=\frac{(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)}{(x_1x_2x_3)^2}$$

同樣地由韋達定理即可求得三次多項式三根的倒數平方和。

b.利用韋達定理求根的立方和

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=[x_1^2+x_2^2+x_3^2-(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)](x_1+x_2+x_3)$$

由韋達定理及根的平方和，即可求得三次多項式三根的立方和。

二、根的冪次和

(一) 根的正整數次方和

1.利用多項式性質

定義數列$S_k=\sum_{i=1}^{n} {x_i}^k$，即$S_k$為根的$k$次方和。由於$x_1$、$x_2$、…、$x_n$為 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的根，因此有:

$$\begin{cases} a_n{x_1}^{k+n}+a_{n-1}{x_1}^{k+n-1}+\cdots+a_1{x_1}^{k+1}+a_0{x_1}^k=0 \\ a_n{x_2}^{k+n}+a_{n-1}{x_2}^{k+n-1}+\cdots+a_1{x_2}^{k+1}+a_0{x_2}^k=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\cdots \\ a_n{x_n}^{k+n}+a_{n-1}{x_n}^{k+n-1}+\cdots+a_1{x_n}^{k+1}+a_0{x_n}^k=0 \end{cases}$$

將其加總，可得:

$$a_n\sum_{i=1}^{n}{x_i}^{k+n}+a_{n-1}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^{k+n-1}+\cdots+a_1\sum_{i=1}^{n}{x_i}^{k+1}+a_0\sum_{i=1}^{n}{x_i}^k=0$$

即:

$$a_nS_{k+n}+a_{n-1}S_{k+n-1}+\cdots+a_1S_{k+1}+a_0S_k=0$$

由此得知S_k為一個n階遞迴數列。僅需求得S_1~S_n就可透過此遞迴關係式推得後面的S_k，甚至可以透過遞迴關係式求得一般式。

以三次多項式$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$為例，利用前面「韋達定理的基本應用」提到的方式得$S_1$~$S_3$後，利用$a_3S_{k+3}+a_2S_{k+2}+a_1S_{k+1}+a_0S_k=0$即可列出遞迴關係式$S_{k+3}=\frac{-1}{a_3}(a_2S_{k+2}+a_1S_{k+1}+a_0S_k)$，進而推得每一項$S_k$。

不過此方法的缺點是要先求得S_1~S_n，因此常用於低次多項式，例如二次或三次多項式，倘若遇到高次多項式欲求S_1~S_n便會很難處理，因此高次多項式幾乎都採用以下第二點的多項式除法。

2.利用多項式除法(此處證明手法參自參考資料 3)

將n次多項式$f(x)$寫成$a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$，則$f(x)$的導函數

$$f'(x)=f(x)\left(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\cdots+\frac{1}{x-x_n}\right)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\ ,$$

將$\frac{1}{x-x_i}$利用等比級數展開:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}=\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{x_i}{x}}=\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x_i}{x})^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{{x_i}^k}{x^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{x^{k+1}}$$

因此可利用長除法將$f'(x)$除以$f(x)$，其商式的係數就會依序是S_0、S_1、$S_2\ldots$，若要再更進一步，也可使用參考資料 3 提到的「廣義綜合除法」，本文在此便不多作補充。

例題一:

方程式$x^5-x^3-x^2-x-1=0$共有 5 個複數根，這些根的五次方總和為何? (108 北二區學科能力競賽)

解:

設$f(x)=x^5-x^3-x^2-x-1$，則$f'(x)=5x^4-3x^2-2x-1$。利用長除法將$f'(x)$除以$f(x)$，得到:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{5}{x}+\frac{0}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^5}+\frac{10}{x^6}+\cdots$$

故 $S_0=5,S_1=0,S_2=2,S_3=3,S_4=6,S_5=10$(此處需注意第一項為$S_0$)。

答:10

以下的例子中，符號$\lfloor x\rfloor$表示不大於x的最大整數，$\lceil x\rceil$表示不小於x的最小整數，而$\prod_{k=1}^{n}x_k=x_1\times x_2\times\ldots\times x_n$表示連乘積。

例題二:

已知方程式$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}a_n = 0$的$n$個根為$x_1, x_2, \ldots, x_n$，試證:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} a_{2k-1} = \frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) - \prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\right)$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} = -1 + \frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) + \prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\right)$

(2023 TRML 高中數學競賽團體試題改編)

解:

將$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)$展開發現: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ ；同理，$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) = 1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ 。

以上兩式相減得:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) - \prod_{k=1}^{n}(1-x_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k = 2(a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) = 2\sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} a_{2k-1}$$ 。

同樣的，兩式相加得:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) + \prod_{k=1}^{n}(1-x_k) = 2 + \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k = 2 + 2(a_2 + a_4 + a_6 + \ldots) = 2 + 2\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k}$$

因此，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} a_{2k-1} = \frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) - \prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\right)$ ，且$\displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} = -1 + \frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) + \prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\right)$ 。

以上，透過方法 1 與方法 2，基本上解決了根的正整數次方和的問題，但若冪次是負整數呢?

(二)根的負整數次方和

首先需要建構以$\frac{1}{x_1}$ 、$\frac{1}{x_2}$ 、 … 、$\frac{1}{x_n}$為根的多項式，令$y = \frac{1}{x}$，並將原方程式的x以y代換掉($y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$)後，新方程式的根即為$\frac{1}{x_1}$ 、$\frac{1}{x_2}$ 、 … 、$\frac{1}{x_n}$。

故新多項式$a_n\left(\frac{1}{y}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{y}\right) + a_0 = 0$，即多項式方程式$a_0y^n + a_1y^{n-1} +$

$\cdots + a_{n-1}y + a_n = 0$的$n$個根為$\frac{1}{x_1}$、$\frac{1}{x_2}$、…、$\frac{1}{x_n}$。

欲求得x_1、x_2、…、x_n的負整數冪次和，等同於求n次多項式方程式$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}y + a_n = 0$的$n$個根$\frac{1}{x_1}$、$\frac{1}{x_2}$、…、$\frac{1}{x_n}$的正整數冪次和，此處藉由前面的兩種方法便能得到結果。

三、i與ω的巧用

運用以上的方法可以解決根的冪次和問題以及部分題型,然而還有一些題型無法輕易拆解成韋達定理的公式型式或者冪次和型式，此時就可引入複數i及ω來解決問題。

1. $\boldsymbol{i}$的巧用

i與$-i$為多項式$x^2 + 1 = 0$之根，有效運用i可以解決一些求和的問題。

例題三:

設$P(x) = x^5 - x^2 + 1 = 0$的五個根為α_1、α_2、…、α_5，$Q(x) = x^2 + 1$，則$Q(\alpha_1) \cdot Q(\alpha_2) \cdot Q(\alpha_3) \cdot Q(\alpha_4) \cdot Q(\alpha_5) =$?

解:

由$x^2 + 1 = (x + i)(x - i) = (-i - x)(i - x)$，得到

$$Q(\alpha_1) \cdot Q(\alpha_2) \cdot Q(\alpha_3) \cdot Q(\alpha_4) \cdot Q(\alpha_5)$$

$$= [(-i - \alpha_1)(-i - \alpha_2) \ldots (-i - \alpha_5)][(i - \alpha_1)(i - \alpha_2) \ldots (i - \alpha_5)]$$

又因$P(x) = x^5 - x^2 + 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_5)$，故

$Q(\alpha_1) \cdot Q(\alpha_2) \cdot Q(\alpha_3) \cdot Q(\alpha_4) \cdot Q(\alpha_5) = P(i) \cdot P(-i) = (i + 2)(-i + 2) = 5$。

答:5

2. $\boldsymbol{\omega}$的巧用

$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$與$\omega^2$為$x^3 = 1$的其中兩根，有效運用$\omega$(例如: $\omega^2 + \omega = -1$、$\omega^3 = 1$等)可以解決一些求和的問題。

例題四:

令x_1、x_2、 ...、x_{18}為方程式$x^{18}+4x^{11}+1=0$的 18 個根，求$({x_1}^4+{x_1}^2+1)({x_2}^4+{x_2}^2+1)\ldots({x_{18}}^4+{x_{18}}^2+1)$的值為何?

(108 中投區學科能力競賽)

解:

令 $f(x)=x^8+4x^{11}+1$。利用

$$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)=(x-\omega)(x-\omega^2)(x+\omega)(x+\omega^2)，$$

得到所求 $=\prod_{i=1}^{18}(x_i-\omega)(x_i-\omega^2)(x_i+\omega)(x_i+\omega^2)$

$$=\prod_{i=1}^{18}(\omega-x_i)(\omega^2-x_i)(-\omega-x_i)(-\omega^2-x_i)$$

又$f(x)=x^{18}+4x^{11}+1=\prod_{i=1}^{18}(x-x_i)$

故所求 $=f(\omega)\cdot f(\omega^2)\cdot f(-\omega)\cdot f(-\omega^2)$

$$=(4\omega^2+2)(4\omega+2)(-4\omega^2+2)(-4\omega+2)$$

$$=[20+8(\omega^2+\omega)][20-8(\omega^2+\omega)]$$

$$=(20-8)(20+8)=336。$$

答:336

(三)韋達跳躍

1988 年的 IMO(國際數學奧林匹亞競賽)的第六題難倒了四位數論專家，當時 268 名參賽選手平均得分 0.6 分(滿分 7 分)，其中有 11 位得了滿分。該題如下:

設正整數a、b滿足$ab+1$可以整除a^2+b^2，證明$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$是完全平方數。

(1988 IMO 第六題)

在 11 位滿分的選手中，保加利亞選手 Emanouil Atanassov 用了簡潔且獨特的方法一章

達跳躍，並因此獲得該年的特別獎。以下是他的證明手法:

令 $k=\frac{a^2+b^2}{ab+1}(k\in\mathbb{N})$，並假設$k$不是完全平方數。

設(A,B)為滿足 $k=\dfrac{x^2+y^2}{xy+1}$ 對應的解中，使得$A+B$為最小值的正整數解，不失一般性假設$A\geq B$。用變數x取代A並重整方程式，則可得知二次方程式$x^2-kBx+(B^2-k)=0$之一根$x_1=A$，設另一根x_2，由韋達定理有:

$$\begin{cases} A+x_2=kB\Longrightarrow x_2=kB-A \\ Ax_2=B^2-k\Longrightarrow x_2=\dfrac{B^2-k}{A}\leq\dfrac{A^2-k}{A}<A \end{cases}$$

1.由$x_2=kB-A$，得知x_2為整數。

2.由$\frac{{x_2}^2+B^2}{x_2B+1}=k>0$，可知$x_2\geq 0$。

3.由$x_2=\frac{B^2-k}{A}\leq\frac{A^2-k}{A}<A$且$k$不為完全平方數，得知$x_2<A$且$x_2\neq 0$。

故x_2為比A小的正整數。因此(x_2,B)亦滿足方程式，且$x_2+B<A+B$，此與 $A+B$ 為最小之假設矛盾。因此k必為完全平方數。

從此這個方法聲名大噪，也廣泛地被列於許多國家競賽培訓的教材之中。由於該方法使用到韋達定理對根進行無窮遞降法，故也被稱作「韋達跳躍」(Vieta jumping)。

參、結論

1.考慮一多項式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，首項係數$a_n\neq 0$。

(1)${x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2=\left(-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2-2\dfrac{a_{n-2}}{a_n}$。

(2)$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}=-\dfrac{a_1}{a_0}$。

2.考慮一三次多項式$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，首項係數$a_3\neq 0$，令三根分別為$x_1$、$x_2$、$x_3$

(1) $\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}+\frac{1}{{x_3}^2}=\frac{(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)}{(x_1x_2x_3)^2}$ 。

(2) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=[x_1^2+x_2^2+x_3^2-(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)](x_1+x_2+x_3)$ 。

3.根的高次冪次和可藉由以下兩種方式求出:

(1)$a_nS_{k+n}+a_{n-1}S_{k+n-1}+\cdots+a_1S_{k+1}+a_0S_k=0$。

(2)$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{x^{k+1}}$ 。

4.利用建構以原根的倒數為根的方程式$a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}y+a_n=0$，可求得根的負整數冪次方和。

5.諸如 $(x_1^2+1)(x_2^2+1)...(x_n^2+1)$ 、 $(x_1^4+x_1^2+1)(x_2^4+x_2^2+1)...(x_n^4+x_n^2+1)$ 的題型可利用i與ω求解。

肆、結語

在求根的各種求和問題時，最常見的想法當然是想辦法將其湊成韋達定理的形式，利用根與係數求解，例如文章前段的幾個例子。然而在求根的高次冪次和時，往往很難將其用韋達定理的型式表示出來，此時就可以利用多項式性質或多項式除法做處理，另外一些題型還可以巧妙的引入i與ω求解。透過以上方法便能一窺根的題型的面貌!

特別感謝指導老師:王鴻翔老師。

參考資料

1. 朱哲。由韋達定理引發的方程求根公式的數學之旅，數學傳播，30 卷 2 期，2006。
2. 陳錦初。多項式根冪次和的新解法，數學傳播，23 卷 3 期，1999。
3. 嚴鎮軍。高中數學競賽教程，九章出版社，2007。
4. 何焱銘。第 25 屆 TRML 高中數學競賽，九九文教基金會，2023。
5. Arthur Engel, Problem-Solving Strategies, Springer, 1999.
6. Yimin Ge, The Method of Vieta Jumping, Mathematical Reflections, 2007。
7. Yimin Ge, Analysis of Generalization of a Problem of Vieta’s Descend Method with Examples and Computing Support, Asian Research Journal of Mathematics, 2022.