

觀察者的位置與視深之關係

朱光昇
省立竹南高中

一、前言

在高中物理課本第十二章〈光的折射〉，討論有關視深的問題，爲了簡化運算，加入了條件——**觀察者在接近物体的正上方觀察**，得到下列的關係式

$$\frac{\text{視深}}{\text{實深}} = \frac{\text{觀察者所在介質的折射率}}{\text{物体所在介質的折射率}} \quad \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

例如：水的折射率約爲 $\frac{4}{3}$ ，則在空氣中觀察水中的物体深度約爲實際的 $\frac{3}{4}$ ，其實，這也只是在（觀察者在接近物体的正上方）的條件下才對的！

如果觀察者的視線與界面的法線（鉛垂線）夾角越大，觀察到的視深也越淺！

視深 Y_2 與實深 Y_1 的關係應如下式

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{n_1(1 + \tan^2 \theta_2) \cos \theta_1}{n_2(1 + \tan^2 \theta_1) \cos \theta_2}, \text{ 其中}$$

n_1 ：物体所在介質的折射率

n_2 ：觀察者所在介質的折射率

θ_1 ：光在 n_1 介質的入射角

θ_2 ：光在 n_2 介質的折射角

二、討論

A. 演算：（參考圖一）

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \text{ ---- (折射定律)}$$

將上式微分得

$$n_1 \cos \theta_1 d\theta_1 = n_2 \cos \theta_2 d\theta_2$$

$$\frac{d\theta_1}{d\theta_2} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1}$$

又

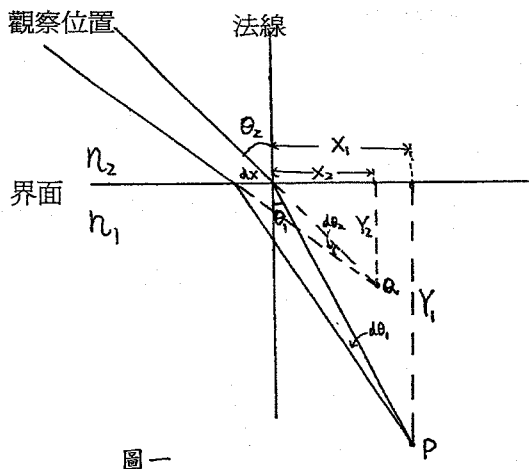
$$X_2 = Y_2 \tan \theta_2 \quad X_1 = Y_1 \tan \theta_1$$

將上兩式微分得

$$dX_2 = Y_2 (1 + \tan^2 \theta_2) d\theta_2$$

$$dX_1 = Y_1 (1 + \tan^2 \theta_1) d\theta_1$$

$$\text{又 } dX_2 = dX_1$$



得

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{(1 + \tan^2 \theta_2) d \theta_2}{(1 + \tan^2 \theta_1) d \theta_1} = \frac{n_1 (1 + \tan^2 \theta_2) \cos \theta_1}{n_2 (1 + \tan^2 \theta_1) \cos \theta_2} \quad \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1 \tan \theta_1}{Y_2 \tan \theta_2} = \frac{n_1 (1 + \tan^2 \theta_2) \cos \theta_1 \tan \theta_1}{n_2 (1 + \tan^2 \theta_1) \cos \theta_2 \tan \theta_2}$$

若觀察者在接近物体的正上方,

$$\theta_1 \rightarrow 0; \theta_2 \rightarrow 0$$

$$\tan \theta_1 \rightarrow 0; \tan \theta_2 \rightarrow 0$$

$$\cos \theta_1 \rightarrow 1; \cos \theta_2 \rightarrow 1$$

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{n_1 (1 + \tan^2 \theta_2) \cos \theta_1}{n_2 (1 + \tan^2 \theta_1) \cos \theta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

B.例題:

若水的折射率為 $4/3$ ，物在水面下 4m ，若在空氣中觀察水中的物体，觀察物体的視角 θ_2 為 45° ，則人觀察到物体的視深為多少？

解:

$$\theta_2 = 45^\circ,$$

$$\sin \theta_1 = \frac{3\sqrt{2}}{8} \quad \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{46}}{8} \quad \tan \theta_1 = \frac{3\sqrt{23}}{23}$$

$$X_1 = Y_1 \tan \theta_1 = \frac{12\sqrt{23}}{23} \quad 2.5 \quad \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{n_1 (1 + \tan^2 \theta_2) \cos \theta_1}{n_2 (1 + \tan^2 \theta_1) \cos \theta_2}$$

$$\frac{4}{Y_2} = \frac{\frac{4}{3}(1+1)\frac{\sqrt{46}}{8}}{(1+\frac{9}{23})\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{23\sqrt{23}}{48}$$

$$Y_2 = 4 \times \frac{48\sqrt{23}}{23 \times 23} \quad 1.74 \quad X_2 = Y_2 \times \tan \theta_2 = \frac{48\sqrt{23}}{23 \times 23} \quad 1.74$$

$$Y_1 = 4$$

也就是說：在空氣中觀察在水面下 4 公尺的物体，若觀察物体的視角為 45° ，則人觀察到物体的視深約為 1.74 公尺，而且在水平方向也會較靠近觀察者（如圖二）。

三、結論

如果觀察者的視線與界面的法線（鉛垂線）夾角越大，觀察到的視深也越淺如圖二。

（下轉 55 頁）