以數學歸納法證明抽籤的公平性

連威翔

中台興化學工業股份有限公司

壹、前言

在數學傳播 43 卷 3 期名為《再談抽籤的公平性》的[1]文中，作者對前一期數學傳播名為《抽籤的公平性》之[2]文的結論給出一個簡潔的另證，其中關鍵的想法是證明「相鄰兩位抽籤者的中獎機率相同」，因此對所有抽籤者而言，中獎的機率並無差別，每位抽籤者無論是先抽或後抽，中獎的機率皆相等，即「抽籤是公平的」。而較早發表的[2]文，則是先利用條件機率的乘法原理寫下一個重要的引理，再以此引理為主要工具，分成幾種不同的情況討論第 i 個人中獎的機率，最後證明抽籤都是公平的。

某次筆者在走路運動的過程中，想起[1],[2]兩篇文章所探討的內容，心中浮現一個想法：「能否使用數學歸納法證明抽籤的公平性呢？」於是便先在心中進行初步的思考，考慮的情況是 n 個人抽 n 支籤的公平性。回家後，便開始動筆寫下初步的證明。

但在寫完證明後，筆者才發現原來[1],[2]文考慮的是更一般的情形。幸運的是，筆者修改原本的證明後，仍得到更一般情形下的證明。底下第二節中，筆者將介紹如何使用數學歸納法來重新證明[1],[2]文所關心之「抽籤的公平性」。

貳、敘述與證明

與筆者在上一節中所提到之「 n 人抽 n 支籤」的情形不同，[1],[2]文考慮更一般的「 p 人抽 n 支籤的公平性，其中 $p \le n$」。參考[1]文開頭處有關抽籤公平性的敘述與限制條件，我們可仿照其敘述方式列出底下的性質：

性質 1：籤筒中共有 n 支籤 $(n \ge 1)$，其中 k 支有獎 $(0 \le k \le n)$。今有 p 個人依序來抽籤 $(1 \le p \le n)$，抽後不放回，令第 i 個人中獎的事件為 A_i，則 $P(A_i) = \frac{k}{n}$ $(1 \le i \le p)$。

上述性質，就是本文想介紹並證明的主要結果。請注意，此處筆者將性質 1 中有獎籤的數目限制從原本[1]文所設定的 $1 \le k \le n$ 改為 $0 \le k \le n$，之所以如此修改，是因為筆者發現在使用歸納法的證明過程中須納入 $k = 0$ 的情形。不過除了 k 值的限制有所不同之外，性質 1 中對 n, p 兩數的限制皆與[2]文相同。

在介紹證明之前，有一事值得一提。在抽籤準備工作中，為了維持最基本的公平性，必須讓籤的總數不小於抽籤的人數。怎麼說呢？若籤筒中籤的總數小於抽籤的人數，則當

籤筒內的籤全部抽完時，會有一部分人尚未抽籤，這些人等於完全沒有中獎的機會，也因此使抽籤失去公平性。相信這就是[1],[2]文中設定 $p \leq n$ 的原因，當然上述的性質 1 也不例外。

底下開始為大家介紹性質 1 的歸納法證明：

證明：已知籤的總數為 n、有獎籤的數目為 k、抽籤的人數為 p，且其中

$$1 \leq p \leq n,\ \ 0 \leq k \leq n,$$

依性質 1 的所述，可知抽獎的第 1 人至第 p 人的中獎機率依序為

$$P(A_1), P(A_2), \ldots, P\big(A_p\big).$$

我們將使用數學歸納法對籤的總數 n 進行歸納，並按照歸納法證明的標準寫法分成兩個步驟進行討論，如下：

[步驟 1]：當 $n = 1$ 時，即籤筒內只有 1 張籤時，由原本 $1 \leq p \leq n$ 的限制條件知 $p = 1$，即抽籤人數為 1 人，接著我們對有獎籤的數目 k 分成 $k = 0, k = 1$ 的兩種情況討論如下：

(a)若 $k = 0$，表示籤筒內只有一張籤且是無獎籤，故抽籤的一人必定抽到無獎籤，中獎機率滿足

$$P(A_1) = 0 = \frac{0}{1} = \frac{k}{n}.$$

(b)若 $k = 1$，表示籤筒內只有一張籤且是有獎籤，故抽籤的一人必定抽到有獎籤，中獎機率滿足

$$P(A_1) = 1 = \frac{1}{1} = \frac{k}{n}.$$

將以上(a), (b)兩項目的討論合起來看，可知當 $n = 1$ 時性質 1 的結論成立，步驟 1 至此結束。

[步驟 2]：假設當 $n = m$ 時性質 1 的結論成立，其中 $m \geq 1$，即當 p 人從有 m 支籤的籤筒中抽籤，其中 $1 \leq p \leq m$，且中獎籤的數目 k 滿足 $0 \leq k \leq m$ 時，抽籤的 p 人中獎的機率 $P(A_1), P(A_2), \ldots, P\big(A_p\big)$ 滿足

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P\big(A_p\big) = \frac{k}{n} = \frac{k}{m}.$$

接著，當 $n = m + 1$ 時，即當 p 人從有 $m + 1$ 支籤的籤筒中抽籤，其中 $1 \leq p \leq m + 1$，且中獎籤的數目 k 滿足 $0 \leq k \leq m + 1$ 時，我們分成

$$k = 0, \qquad k = m + 1, \qquad 1 \leq k \leq m,$$

的三種情況討論如下：

(A)若 $k=0$，表示籤筒內所有的籤都是無獎籤，故抽獎的 p 人無論如何都將抽到無獎籤，中獎機率滿足

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_p)=0=\frac{0}{m+1}=\frac{k}{n}.$$

(B)若 $k=m+1$，則籤筒內所有的籤都是有獎籤，又抽獎的人數 p 少於有獎的籤數 $m+1$，故抽獎的 p 人無論如何都將抽到有獎籤，中獎機率滿足

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_p)=1=\frac{m+1}{m+1}=\frac{k}{n}.$$

(C)若 $1\le k\le m$，此情況下我們再對抽籤人數 p 分成 $p=1$ 與 $2\le p\le m+1$ 的兩種情形進行討論，如底下的(C-1), (C-2)項目：

(C-1)當 $p=1$ 時，恰有一人進行抽籤，此人中獎的機率 $P(A_1)$ 滿足

$$P(A_1)=\frac{k}{m+1}=\frac{k}{n}.$$

(C-2)當 $2\le p\le m+1$ 時，抽籤人數至少有兩人，其中第一人抽籤中獎的機率 $P(A_1)$ 滿足

$$P(A_1)=\frac{k}{m+1}=\frac{k}{n}.$$

當第一人完成抽籤後，後面的 $p-1$ 人準備依序抽籤時，籤筒內剩下 m 支籤，由本項目一開始所設定的條件 $2\le p\le m+1$ 可知

$$1\le p-1\le m. \tag{1}$$

而有獎籤數目可能是 $k-1$ (第一人中獎)或 k (第一人沒中獎)，由(C)項目一開始所設定的條件 $1\le k\le m$ 可知

$$0\le k-1<k\le m. \tag{2}$$

以(1), (2)兩式搭配[步驟 2]開頭處所給的歸納法假設，可知對後面的 $p-1$ 位抽獎者來說，他們從剩下 m 支籤的籤筒中抽籤時中獎的機率相等(均為 $\frac{k-1}{m}$ 或均為 $\frac{k}{m}$)。我們以第 1 人中獎(機率 $\frac{k}{m+1}$)與第 1 人沒中獎(機率 $\frac{m+1-k}{m+1}$)的兩種情況搭配兩情況接下來後面 $p-1$ 人中獎的機率($\frac{k-1}{m}$ 與 $\frac{k}{m}$)，可知整個抽籤過程後面的 $p-1$ 位抽獎者(即第 2 人至第 p 人)中獎的機率滿足

$$P(A_2) = \cdots = P(A_p) = \frac{k}{m+1} \times \frac{k-1}{m} + \frac{m+1-k}{m+1} \times \frac{k}{m} = \frac{k^2 - k + mk + k - k^2}{m(m+1)} = \frac{mk}{m(m+1)}$$

$$= \frac{k}{m+1} = \frac{k}{n} = P(A_1).$$

將以上(A), (B), (C)三項目的討論結果合起來看，可知當 $n = m + 1$ 時，性質 1 的結論亦成立，步驟 2 至此結束。

完成以上[步驟 1]與[步驟 2]的討論後，由數學歸納法原理知性質 1 對任意正整數 n 均成立，證明完畢。

透過上述討論，我們就以數學歸納法證明了性質 1。至此我們就知道當性質 1 中的參數 p, n, k 之值都確定後，參與抽籤的 p 人中獎的機率均為 $\frac{k}{n}$，此機率值與人數 p 無關，也與性質 1 中表示「抽籤順序」的參數 i 無關。

特別地，對於人數 p 我們若在 $2 \le p \le n$ 的條件下看性質 1 的結論，則可知當抽籤人數在兩人以上時所有抽籤者中獎的機率皆相同，此結果就是[1],[2]文所提到之「抽籤的公平性」。

<u>當籤的總數等於抽籤人數時</u>：

回顧性質 1，若在性質 1 中令 $p = n$，則可得底下這個較弱的性質：

性質 2：籤筒中共有 n 支籤 ($n \ge 1$)，其中 k 支有獎 ($0 \le k \le n$)。今有 n 個人依序來抽籤，抽後不放回，令第 i 個人中獎的事件為 A_i，則 $P(A_i) = \frac{k}{n}$。

此處提到性質 2 的原因有二，第一個原因，是因為筆者發現高中教材在介紹抽籤的公平性時，使用的例題常與性質 2 一樣設定「抽籤人數=籤的總數」，例如在[2]文開頭處所提到的機率問題就是。而性質 1 告訴我們即使用來表示人數的 p 值選擇 2 至 n 的任一個整數，在抽籤的過程中同樣具有公平性。

提到性質 2 的第二個原因，是因為筆者最初寫下的歸納法證明其實並不是針對性質 1 所提出，而是針對性質 2。但後來發現性質 2 所設定的抽籤人數與[1]文開頭處設定的條件不同，且在經過嘗試之後，發現無法從性質 2 的結論推得性質 1，於是又花了點時間進行改寫，才完成性質 1 的證明。

讀者若有興趣，也可試著練習用歸納法寫出性質 2 的證明(與性質 1 的證明過程類似)，即可明白其中的差異為何。

參、結語

本文只是簡單的心得分享，能夠完成本文，要感謝[2]文與[1]文(按文章發表順序)的作者扮演了先行者的角色，在筆者心中播下種子，今日才有機會完成本文。讀者若願意的話，也可將本文視為對[1]文或[2]文的補充。

最後，筆者想建議對數學寫作有興趣的讀者，平時不妨培養走路或慢跑的運動習慣，因為在運動的過程中，或許會在無意間從腦海中浮現一些想法。這也是筆者自身的體驗，如同本文第一節所述那樣。

參考文獻

1. 吳建生，張海潮。再談抽籤的公平性。數學傳播季刊, 43(3), 43-44, 2019。
2. 周伯欣。抽籤的公平性。數學傳播季刊, 43(2) , 49-54, 2019。