$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$ 的推廣

許閔揚

彰化縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

在文章[3]中，彰師大數學系陳國傑教授給出了數學式 $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$ 一個簡單的數論證明，其中 n 為自然數， $[x]$ 為小於或等於 x 最大整數。這個等式是天才數學家拉馬奴姜(Ramanujan)於 1918 年左右所發現，他將結果投稿到印度數學期刊(J. Indian Math. Soc)[5]。隨後，李錦鏗教授以微積分證明並推廣了拉馬奴姜的等式[1][2]。設 k 是一個自然數，我們發現可以將這個等式推廣成 $[\sqrt{\frac{n}{k} + \sqrt{\frac{n}{k} + 1}}] = [\sqrt{\frac{4n}{k} + r}]$ ，其中 n 為足夠大的自然數， r 是某範圍內的實數，其 n 與 r 的範圍隨 k 除以 4 的餘數而定。

貳、 $[\sqrt{\frac{n}{k} + \sqrt{\frac{n}{k} + 1}}] = [\sqrt{\frac{4n}{k} + r}]$ 的探討

對於 r 的範圍，我們將自然數 k 分成 4 類來討論，即以下引理 1 到 4。

引理 1: 當 $k \equiv 0 \pmod{4}$ ，若實數 r 滿足 $2 - \frac{4}{k} < r < 2$ ，則對任意自然數 n ，

$$\left[\sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{4}{k}} \right] = \left[\sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right] \text{ 都成立。}$$

證明: 任選 r 滿足 $2 - \frac{4}{k} < r < 2$ ，若存在自然數 n 使得

$$\left[\sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{4}{k}} \right] \neq \left[\sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right], \text{ 即存在自然數 } n \text{ 使得 } \sqrt{\frac{4n}{k} + r} \text{ 的整數部分大於}$$

$\sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{4}{k}}$ 的整數部分，那麼就有一個自然數 m ，使得

$$\sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{4}{k}} < m \leq \sqrt{\frac{4n}{k} + r}$$

$$\Rightarrow \frac{4n}{k} + 2 - \frac{4}{k} < m^2 \leq \frac{4n}{k} + r$$

$$\Rightarrow 4n + 2k - 4 < km^2 \leq 4n + kr < 4n + 2k$$

$$\Rightarrow km^2 = 4n + 2k - i, i = 1, 2, 3$$

因為 $k \equiv 0 \pmod{4}$ ，所以 $km^2 \equiv 0 \pmod{4}$ 但 $4n + 2k - i \equiv -i \pmod{4}$ ，得到矛盾，因此若實

數 r 滿足 $2 - \frac{4}{k} < r < 2$ 則對任何自然數 n ， $\left[\sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{4}{k}} \right] = \left[\sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right]$ 都成立。

引理 2: 當 $k \equiv 1 \pmod{4}$ ，若實數 r 滿足 $2 - \frac{1}{k} < r \leq 2 + \frac{1}{k}$ ，則對任意自然數 n ，

$$\left[\sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{1}{k}} \right] = \left[\sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right] \text{ 都成立。}$$

證明：任選 r 滿足 $2 - \frac{1}{k} < r \leq 2 + \frac{1}{k}$ ，若存在自然數 n 使得 $\left[\sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{1}{k}} \right] \neq \left[\sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right]$ ，即

存在自然數 n 使得 $\sqrt{\frac{4n}{k} + r}$ 的整數部分大於 $\sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{1}{k}}$ 的整數部分，那麼就有一個自然

數 m ，使得

$$\sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{1}{k}} < m \leq \sqrt{\frac{4n}{k} + r}$$

$$\Rightarrow \frac{4n}{k} + 2 - \frac{1}{k} < m^2 \leq \frac{4n}{k} + r \leq \frac{4n}{k} + 2 + \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow 4n + 2k - 1 < km^2 \leq 4n + kr \leq 4n + 2k + 1$$

$$\Rightarrow km^2 = 4n + 2k + i, i = 0, 1$$

因為 $k \equiv 1 \pmod{4}$ ，且 $m^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 所以 $km^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 但， $4n + 2k + 0 \equiv 2 \pmod{4}$ ， $4n + 2k + 1 \equiv 3 \pmod{4}$ 得到矛盾，因此若實數 r 滿足 $2 - \frac{1}{k} < r \leq 2 + \frac{1}{k}$ 則對任何

自然數 n ， $\left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{1}{k}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right\rfloor$ 都成立。

引理 3: 當 $k \equiv 2 \pmod{4}$ ，若實數 r 滿足 $2 - \frac{2}{k} < r < 2$ ，則對任意自然數 n ，

$$\left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right\rfloor \text{ 都成立。}$$

證明: 任選 r 滿足 $2 - \frac{2}{k} < r < 2$ ，若存在自然數 n 使得 $\left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k}} \right\rfloor \neq \left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right\rfloor$ ，即存

在自然數 n 使得 $\sqrt{\frac{4n}{k} + r}$ 的整數部分大於 $\sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k}}$ 的整數部分，那麼就有一個自然數 m ，使得

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k}} < m \leq \sqrt{\frac{4n}{k} + r} \\ \Rightarrow \frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k} < m^2 \leq \frac{4n}{k} + r < \frac{4n}{k} + 2 \\ \Rightarrow 4n + 2k - 2 < km^2 \leq 4n + kr < 4n + 2k \\ \Rightarrow km^2 = 4n + 2k - 1 \end{aligned}$$

因為 $k \equiv 2 \pmod{4}$ ，且 $m^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 所以 $km^2 \equiv 0, 2 \pmod{4}$ 但， $4n + 2k - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ 得到矛盾，因此若實數 r 滿足 $2 - \frac{2}{k} < r < 2$ 則對任何自然數 n ，

$$\left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right\rfloor \text{ 都成立。}$$

引理 4: 當 $k \equiv 3 \pmod{4}$ ，若實數 r 滿足 $2 - \frac{2}{k} < r \leq 2$ ，則對任意自然數 n ，

$$\left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right\rfloor \text{ 都成立。}$$

證明: 任選 r 滿足 $2 - \frac{2}{k} < r \leq 2$ ，若存在自然數 n 使得 $\left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k}} \right\rfloor \neq \left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right\rfloor$ ，即存

在自然數 n 使得 $\sqrt{\frac{4n}{k} + r}$ 的整數部分大於 $\sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k}}$ 的整數部分，那麼就有一個自然數 m ，使得

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k}} < m \leq \sqrt{\frac{4n}{k} + r} \\ \Rightarrow \frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k} < m^2 \leq \frac{4n}{k} + r \leq \frac{4n}{k} + 2 \\ \Rightarrow 4n + 2k - 2 < km^2 \leq 4n + kr \leq 4n + 2k \\ \Rightarrow km^2 = 4n + 2k - 1 \text{ 或 } 4n + 2k \end{aligned}$$

因為 $k \equiv 3 \pmod{4}$ ，且 $m^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 所以 $km^2 \equiv 0, 3 \pmod{4}$ 但，

$4n + 2k - 1 \equiv 1 \pmod{4}$ ， $4n + 2k \equiv 2 \pmod{4}$ 得到矛盾，因此若實數 r 滿足 $2 - \frac{2}{k} < r \leq 2$ 則

對任何自然數 n ， $\left[\sqrt{\frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k}} \right] = \left[\sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right]$ 都成立。

定理 1: 對任意自然數 k ，

(1) 當 $k \equiv 0 \pmod{4}$ ，若實數 r 滿足 $2 - \frac{4}{k} \leq r < 2$ ，則當自然數 $n \geq \left(\frac{k-4}{4}\right)^2$ ，

$$\left[\sqrt{\frac{n}{k}} + \sqrt{\frac{n}{k} + 1} \right] = \left[\sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right] \text{ 都成立。}$$

(2) 當 $k \equiv 1 \pmod{4}$ ，若實數 r 滿足 $2 - \frac{1}{k} \leq r \leq 2 + \frac{1}{k}$ ，則當自然數 $n \geq \left(\frac{k-1}{2}\right)^2$ ，

$$\left[\sqrt{\frac{n}{k}} + \sqrt{\frac{n}{k} + 1} \right] = \left[\sqrt{\frac{4n}{k} + r} \right] \text{ 都成立。}$$

(3) 當 $k \equiv 2 \pmod{4}$ ，若實數 r 滿足 $2 - \frac{2}{k} \leq r < 2$ ，則當自然數 $n \geq \frac{(k-2)^2}{8}$ ，

$$\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{k}} + \sqrt{\frac{n}{k}+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k}+r} \right\rfloor \text{ 都成立。}$$

(4) 當 $k \equiv 3 \pmod{4}$ ，若實數 r 滿足 $2 - \frac{2}{k} \leq r \leq 2$ ，則當自然數 $n \geq \frac{(k-2)^2}{8}$ ，

$$\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{k}} + \sqrt{\frac{n}{k}+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\frac{4n}{k}+r} \right\rfloor \text{ 都成立。}$$

證明：

(1)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4n}{k}+2-\frac{4}{k}} &\leq \sqrt{\frac{n}{k}} + \sqrt{\frac{n}{k}+1} < \sqrt{\frac{4n}{k}+2} & (1.1) \\ \Leftrightarrow \frac{4n}{k}+2-\frac{4}{k} &\leq \frac{n}{k} + \frac{n}{k}+1+2\sqrt{\frac{n}{k}}\sqrt{\frac{n}{k}+1} < \frac{4n}{k}+2 \\ \Leftrightarrow \frac{2n}{k}+1-\frac{4}{k} &\leq 2\sqrt{\frac{n}{k}}\sqrt{\frac{n}{k}+1} < \frac{2n}{k}+1 \\ \Leftrightarrow \frac{4n^2}{k^2}+2 \cdot \frac{2n}{k}\left(1-\frac{4}{k}\right) &+ \left(1-\frac{4}{k}\right)^2 \leq 4\frac{n}{k}\left(\frac{n}{k}+1\right) < \frac{4n^2}{k^2} + \frac{4n}{k}+1 \\ \Leftrightarrow \left(1-\frac{4}{k}\right)^2 - \frac{16n}{k^2} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow n \geq \left(\frac{k-4}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

由引理 1 與(1.1)即得證。

(2)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4n}{k}+2-\frac{1}{k}} &\leq \sqrt{\frac{n}{k}} + \sqrt{\frac{n}{k}+1} \leq \sqrt{\frac{4n}{k}+2+\frac{1}{k}} & (1.2) \\ \Leftrightarrow \frac{4n}{k}+2-\frac{1}{k} &\leq \frac{n}{k} + \frac{n}{k}+1+2\sqrt{\frac{n}{k}}\sqrt{\frac{n}{k}+1} \leq \frac{4n}{k}+2+\frac{1}{k} \\ \Leftrightarrow \frac{2n}{k}+1-\frac{1}{k} &\leq 2\sqrt{\frac{n}{k}}\sqrt{\frac{n}{k}+1} \leq \frac{2n}{k}+1+\frac{1}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{4n^2}{k^2} + 2 \cdot \frac{2n}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \leq 4 \frac{n}{k} \left(\frac{n}{k} + 1\right) \leq \frac{4n^2}{k^2} + 2 \cdot \frac{2n}{k} \left(1 + \frac{1}{k}\right) + \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 - \frac{4n}{k^2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow n \geq \left(\frac{k-1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

由引理 2 與(1.2) 即得證。

(3)

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{4n}{k} + 2} - \frac{2}{k} \leq \sqrt{\frac{n}{k}} + \sqrt{\frac{n}{k} + 1} < \sqrt{\frac{4n}{k} + 2} \quad (1.3) \\ &\Leftrightarrow \frac{4n}{k} + 2 - \frac{2}{k} \leq \frac{n}{k} + \frac{n}{k} + 1 + 2\sqrt{\frac{n}{k}}\sqrt{\frac{n}{k} + 1} < \frac{4n}{k} + 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2n}{k} + 1 - \frac{2}{k} \leq 2\sqrt{\frac{n}{k}}\sqrt{\frac{n}{k} + 1} < \frac{2n}{k} + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{4n^2}{k^2} + 2 \cdot \frac{2n}{k} \left(1 - \frac{2}{k}\right) + \left(1 - \frac{2}{k}\right)^2 \leq 4 \frac{n}{k} \left(\frac{n}{k} + 1\right) < \frac{4n^2}{k^2} + 2 \cdot \frac{2n}{k} + 1 \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{k}\right)^2 - \frac{8n}{k^2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{(k-2)^2}{8}. \end{aligned}$$

由引理 3 與(1.3) 即得證。

(4) 證法與(3)同。

參、結語

本篇文章是將拉曼奴姜等式做一個推廣，引理 1 到引理 4 的證明的方法主要參考李錦鏗教授的文章[2]。在定理 1 中，當我們取 $k=1$ 即可得到原來拉曼奴姜等式

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+3}\right].$$

有興趣的讀者可用計算機做數值實驗，相信可以對這類型的等式作出更多發現。

參考文獻

- [1] 李錦鏗。等式 $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{9n+8} \rfloor$ 成立嗎?。數學傳播季刊, 39(3), 42-46, 2015。
- [2] 李錦鏗。等式 $\lfloor \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{8n+4} \rfloor$ 不是一個孤立的等式。數學傳播季刊, 40(1), 72-80, 2016。
- [3] Kuo-Jye Chen : On a problem proposed by Ramanujan , 彰化師範大學自然科學 研討會會議手冊, 2014。
- [4] <http://science.ncue.edu.tw/journal/article/1-2-7.pdf>
- [5] B. C. Berndt, Ramanujan's Notebooks, Part IV, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [6] S. Ramanujan, Question 723, J. Indian Math. Soc., Volume 10 (1918) 357-358.