2023 年亞洲物理奧林匹亞競賽國家代表隊初選考試部分試題解析–行星逆行

黃光照

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

2023 年第 23 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及第 53 屆國際物理奧林匹亞競賽之國家代表隊初選考試理論試題中，有一道計算題是關於行星(水星)逆行的題目，官方所提供的解答過程稍嫌繁複，部分學生不易看懂，本文將提出兩種簡單的解法：基本的微分方法，及幾何作圖法，供讀者參考。

貳、題目敘述 — 行星逆行

『行星逆行』問題出現在此份理論試題第二部分計算題的第一題，題目敘述如下：

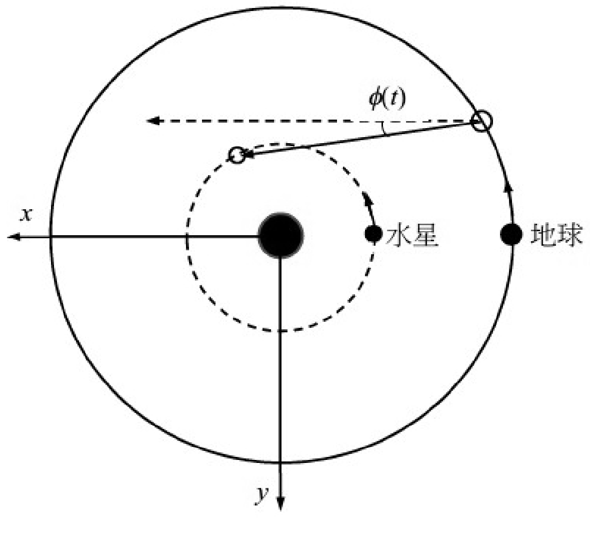

圖 1

為簡化計算，假設地球與水星繞行太陽的軌道皆為圓軌道，且在一個平面上。若水星的軌道半徑與地球的軌道半徑比值為α_0，且 $t = 0$ 時，太陽、水星與地球三個球體的中心連成一條直線，見圖 1 的實心黑球，且定義此時地球指向太陽的方向為 x 軸正向，如圖 1 所示。若地球繞太陽的角頻率為 ω，定義水星相對於地球的位置向量與 x 軸正向的夾

角為$\phi(t)$，

(a) 求 tan$\phi(t)$ (以α_0, ω及 t 的函數表示之)

在$\phi(t)$隨時間遞減的這段時間內，這就是所謂的水星逆行。

(b) 已知 $\alpha_0 \approx 0.39$。若以太陽、水星與地球三個球體的中心連成一條直線時訂為時刻 t = 0，現以 t = 0 為參考點，且水星在$[-t_0,t_0]$這段時間內會呈現逆行，求 t_0。

參、第一解法 — 基本的微分方法

(a) 求 tan$\phi(t)$:

由克卜勒行星運動第三定律和圓周運動的公式，可得

$$\begin{cases} R^3/T^2 = 定值 \\ T = 2\pi/\omega \end{cases} \Rightarrow \omega \propto \frac{1}{R^{3/2}} \Rightarrow \omega_m = {\alpha_0}^{-3/2}\omega \tag{1}$$

其中 ω_m、ω 各為水星與地球繞日做圓周運動的角頻率，α_0為水星繞日軌道半徑(R_m)與地球繞日軌道半徑(R_e)的比值，即$\alpha_0 = \frac{R_m}{R_e}$。

由題目所給予的水星和地球繞日的圖形(如圖 1)，可得地球、水星的軌道參數式為

$$\vec{r}_m(t) = -\alpha_0 R_e[cos(\alpha_0^{-3/2}\omega t)\hat{x} + sin(\alpha_0^{-3/2}\omega t)\hat{y}]；$$

$$\vec{r}_e(t) = -R_e[cos(\omega t)\hat{x} + sin(\omega t)\hat{y}] \tag{2}$$

從地球上看水星所在的位置為$\vec{r}_m(t) - \vec{r}_e(t)$ ，因此相對角度$\phi(t)$對應之

$$tan\,\phi(t) = \frac{\Delta y_{me}}{\Delta x_{me}} = \frac{\alpha_0\,sin(\alpha_0^{-3/2}\omega t) - sin(\omega t)}{\alpha_0\,cos(\alpha_0^{-3/2}\omega t) - cos(\omega t)} \tag{3}$$

(b) 求 t_0:

將式(3)兩邊對時間微分，得

$$\frac{\dot{\phi}(t)}{cos^2\phi(t)} = \frac{\omega({\alpha_0}^{1/2}+1) - \omega(\alpha_0 + {\alpha_0}^{-1/2})\,cos[(\alpha_0^{-3/2}-1)\omega t]}{[\alpha_0\,cos(\alpha_0^{-3/2}\omega t) - cos(\omega t)]^2} \tag{4}$$

水星和地球皆以逆時針方向繞日公轉，且水星繞日公轉的角速度ω_m大於地球繞日公轉的角速度ω。當由地球看水星的角速度為$\dot{\phi}(t) > 0$，表示水星跑在地球前面，由地球看水星在天空運行的方向為逆時針方向，水星順行；當$\dot{\phi}(t) < 0$時，表示水星落後於地球，由地球看水星在天空運行的方向為順時針方向，水星逆行。而當$\dot{\phi}(t) = 0$時，表示水星由順行轉逆行(圖 2 中的 a 點)或由逆行轉順行(圖 2 中的 b 點)的瞬間。

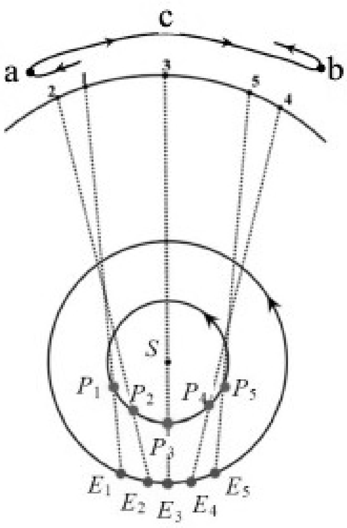

圖 2

令 $\dot{\phi}(t)=0$，有

$$\omega({\alpha_0}^{1/2}+1)-\omega(\alpha_0+{\alpha_0}^{-1/2})\,cos[\,(\alpha_0^{-3/2}-1)\omega t]=0$$

(5)

解得

$$t=\pm\frac{1}{\omega(\alpha_0^{-3/2}-1)}cos^{-1}\frac{{\alpha_0}^{1/2}+1}{\alpha_0+{\alpha_0}^{-1/2}} \qquad (6)$$

現檢視水星在

$$t\in\left(-\frac{1}{\omega(\alpha_0^{-3/2}-1)}cos^{-1}\frac{{\alpha_0}^{1/2}+1}{\alpha_0+{\alpha_0}^{-1/2}},\frac{1}{\omega(\alpha_0^{-3/2}-1)}cos^{-1}\frac{{\alpha_0}^{1/2}+1}{\alpha_0+{\alpha_0}^{-1/2}}\right) \qquad (7)$$

期間，$\dot{\phi}(t)$是否恆為負值？即檢視(4)式右方的分子部分小於零即可。取$t=0$，$\alpha_0\approx 0.39$代入，得

$$\omega({\alpha_0}^{1/2}+1)-\omega(\alpha_0+{\alpha_0}^{-1/2})\,cos[\,(\alpha_0^{-3/2}-1)\omega t]=-0.367\omega<0 \qquad (8)$$

因此可以確定水星在這段時間間隔內，$\dot{\phi}(t)$恆為負值，或$\phi(t)$隨時間遞減，這段時間內水星將發生逆行，從地球看水星在天空運行的方向為圖 2 中的 a→c→b。當地球、水星和太陽連線時訂為 t = 0，即圖 2 中的 c 點時刻，依題目所述水星在$[-t_0,t_0]$這段時間內呈現逆行，則時刻$-t_0$、t_0分別代表圖 2 中的 a 點和 b 點的時刻。

由於地球繞日的角速率 $\omega=2\pi/年$，則

$$t_0 = \frac{1}{\omega(\alpha_0^{-3/2}-1)} cos^{-1} \frac{{\alpha_0}^{1/2}+1}{\alpha_0+{\alpha_0}^{-1/2}} = 0.0316\ 年 = 11.53\ 天 \tag{9}$$

肆、第二解法 — 幾何作圖法

(a) 求 $\tan\phi(t)$:

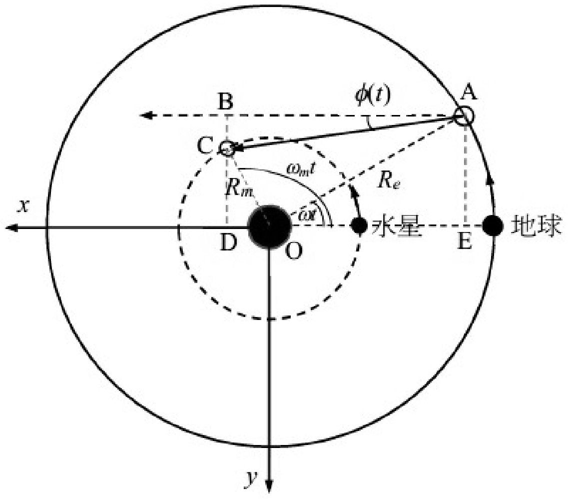

圖 3

由圖 3 知

$$tan\,\phi\,(t) = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{AE}}-\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{OE}}+\overline{\mathrm{OD}}} = \frac{R_e\,sin(\omega t)-R_m\,sin(\omega_m t)}{R_e\,cos(\omega t)-R_m\,cos(\omega_m t)}$$

(10)將(1)式中的

$\omega_m = {\alpha_0}^{-3/2}\omega$以及$R_m = \alpha_0 R_e$代入(10)式，得

$$tan\,\phi\,(t) = \frac{\alpha_0\,sin({\alpha_0}^{-3/2}\omega t)-sin(\omega t)}{\alpha_0\,cos({\alpha_0}^{-3/2}\omega t)-cos(\omega t)} \tag{11}$$

(b) 求 t_0:

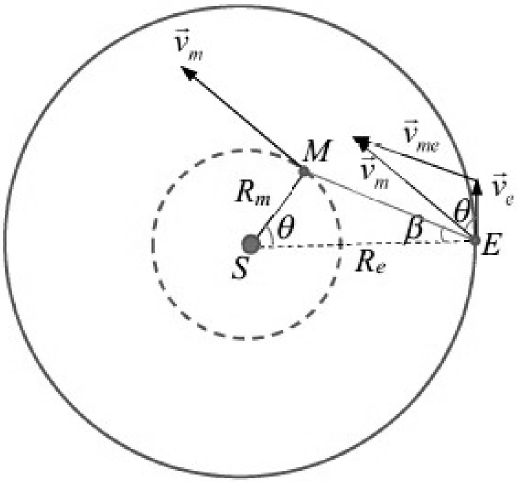

圖 4

如圖 4 所示，當水星相對於地球的速度$\vec{v}_{me} = \vec{v}_m - \vec{v}_e$之方向與水星、地球的連心線$\overline{ME}$平行，即$\vec{v}_{me} // \overline{ME}$，此時的位置為留。因$\alpha_0 = \frac{R_m}{R_e}$，此時由圖 4 知

$$\frac{R_e}{sin(\theta+\beta)} = \frac{R_m}{sin\,\beta} \Rightarrow \alpha_0^{-1} = \frac{sin(\theta+\beta)}{sin\,\beta} = \frac{sin\,\theta\,cos\,\beta}{sin\,\beta} + cos\,\theta$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha_0^{-1} - cos\,\theta = \frac{sin\,\theta\,cos\,\beta}{sin\,\beta} \qquad (12)$$

速度大小v_e 和v_m滿足

$$\frac{v_e}{sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\beta\right)} = \frac{v_m}{sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} \Rightarrow \frac{R_e\omega}{cos(\theta+\beta)} = \frac{R_m\omega_m}{cos\,\beta}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{R_e\omega}{R_m\omega_m} = \frac{cos(\theta+\beta)}{cos\,\beta} = cos\,\theta - \frac{sin\,\theta\,sin\,\beta}{cos\,\beta} \qquad (13)$$

根據克卜勒行星運動第三定律

$$\frac{R_e\omega}{R_m\omega_m} = \alpha_0^{-1}\ \alpha_0{}^{3/2} = \alpha_0{}^{1/2} \qquad (14)$$

由(13)式和(14)式，得

$$cos\,\theta - \alpha_0{}^{1/2} = \frac{sin\,\theta\,sin\,\beta}{cos\,\beta} \qquad (15)$$

由(12)式和(15)式相乘，得

$$(\alpha_0^{-1} - \cos\theta)(\cos\theta - {\alpha_0}^{1/2}) = \sin^2\theta$$

➪ $$\cos\theta = \frac{1+{\alpha_0}^{-1/2}}{\alpha_0^{-1}+{\alpha_0}^{1/2}} = 0.8158 \qquad (16)$$

式中已代入題目所給數據$\alpha_0 \approx 0.39$，得 $\theta = \pm 35.33^o$，這時水星相對於地球的位置為留。$\theta = +35.33^o$表示：若訂在水星與太陽、地球共線時刻 $t = 0$，再經 t_0時間，水星比地球繞行的角度多出35.33^o，此時【太陽與水星的連線】和【太陽與地球的連線】夾35.33^o，水星相對於地球的位置為留，如圖 5 所示；而 t_0 可以如下求得：

$$35.33^o = \theta_m - \theta_e = \omega_m t_0 - \omega t_0 = \left[\left({\alpha_0}^{-3/2} - 1\right)\omega\right]t_0 = \left[\left(0.39^{-3/2} - 1\right)\frac{360^o}{365\text{天}}\right]t_0$$

➪ $$t_0 = 11.53\ \text{天} \qquad (17)$$

至於$\theta = -35.33^o$表示：若訂在水星與太陽、地球共線時刻 $t = 0$，在時間 $-t_0$時，水星相對於地球的位置為【留】，此時【太陽與水星的連線】和【太陽與地球的連線】夾35.33^o。經 t_0時間，來到時刻 $t = 0$，這時水星與太陽、地球共線，如圖 6 所示。此意味著在這段 t_0 時間裡，水星比地球繞行的角度多出35.33^o，如此與上述$\theta = +35.33^o$的情形一樣，可得出$t_0 = 11.53$天。

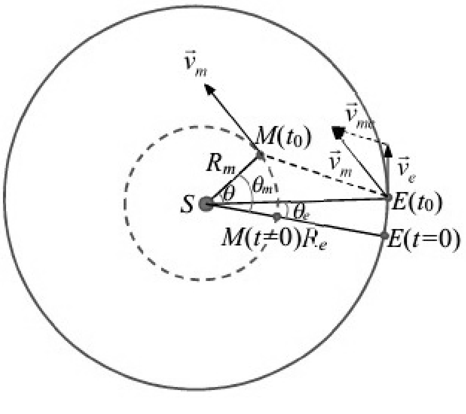

圖 5

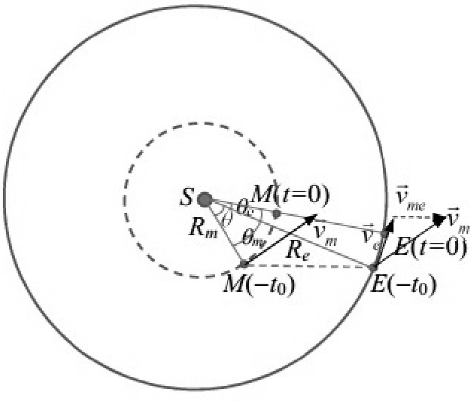

圖 6

➪ 逆行的總時間 $2t_0 = 23.06$ 天 (18)

2023 年水星逆行時間表如下：

第一波水逆：2022 年 12/29～2023 年 1/18

第二波水逆：2023 年 4/21～5/15

第三波水逆：2023 年 8/24～9/16

第四波水逆：2023 年 12/13～2024 年 1/2

上述方法所求得的答案與水星逆行的天數接近。此幾何解法較為簡單，易為高中生所接受。

參考文獻

程稼夫(2021)，中學奧林匹克競賽物理講座，第 2 版，安徽省合肥市，中國科學技術大學，例題 13 行星沖日，50-53。