

空間中點到直線的距離一題多解

周芳宇* 徐上航 許閔揚

彰化縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

在高中數學第四冊空間中的直線單元中，計算空間中點到直線的距離為同學會遇到的問題，課程中通常都使用兩向量垂直時，其內積為零的特性來解決，然而除了該解法外，還有其他方式可以求解，本文提供課本外的幾種解法供讀者參考。

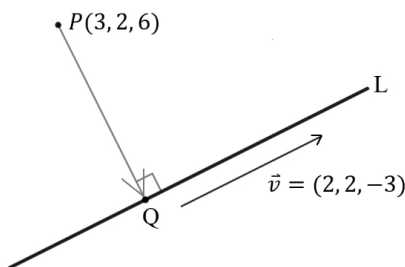
此外，本文也將延伸探討將點到直線的問題推廣至 R^n 中的情況，並以此驗證此方法適用於上述空間中點到直線的問題中的部分解法。

貳、解法

題目（選自高中數學 4A 龍騰版第 6 單元例題 10）：

點 $P(3, 2, 6)$ 為直線 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-3}$ 外一點，求點 P 到直線 L 的距離？

解法 1：向量正交（內積為 0）



設 Q 為 P 在直線 L 上的投影點。

因為 Q 在直線 L 上，所以可將 Q 點的坐標表示成 $(1 + 2t, 2 + 2t, -1 - 3t)$ ，得

$$\overrightarrow{PQ} = (2t - 2, 2t, -3t - 7)。$$

又因為 $\overrightarrow{PQ}$ 和直線 L 的方向向量 $\vec{v} = (2, 2, -3)$ 垂直，所以

$$(2t - 2, 2t, -3t - 7) \cdot (2, 2, -3) = 0，$$

即

$$2 \times (2t - 2) + 2 \times 2t + (-3) \times (-3t - 7) = 0，$$

解得 $t = -1$ 。

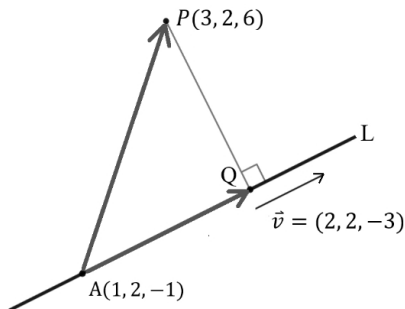
*為本文通訊作者

故 P 在直線 L 上的投影點為 $Q(-1, 0, 2)$ 。

利用兩點距離公式，得點 P 到直線 L 的距離

$$PQ = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-2)^2 + (2-6)^2} = 6。$$

解法 2：正射影



設 $\vec{v} = (2, 2, -3)$ 為直線 L 的一個方向向量，在直線 L 上的取一點 $A(1, 2, -1)$ ，得 $\overrightarrow{AP} = (2, 0, 7)$ 。

做 $\overrightarrow{AP}$ 在直線 L 上的正射影 $\overrightarrow{AQ}$ ，則 Q 為 P 在直線 L 上的投影點。

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP}$ 在 $\vec{v}$ 上的正射影

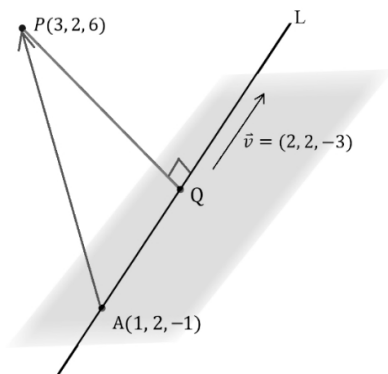
$$= \left(\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v} = \left(\frac{2 \times 2 + 0 \times 2 + 7 \times (-3)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2}^2} \right) \vec{v} = -\vec{v} = (-2, -2, 3)。$$

得 Q 點的坐標為 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = (-1, 0, 2)$ 。

利用兩點距離公式，得點 P 到直線 L 的距離

$$PQ = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-2)^2 + (2-6)^2} = 6。$$

解法 3：做包含直線 L 且垂直 $\overrightarrow{PQ}$ 的平面



設 Q 為 P 在直線 L 上的投影點， $\vec{v} = (2, 2, -3)$ 為直線 L 的一個方向向量。

在直線 L 上的取一點 $A(1, 2, -1)$ ，則 $\overrightarrow{AP} = (2, 0, 7)$ 。

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-14, 20, 4) = -2 \times (7, -10, -2),$$

設 $\vec{u} = (7, -10, -2)$ ，此時， $\vec{u} \perp \overrightarrow{AP}$ ，且 $\vec{u} \perp \vec{v}$ 。

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -10 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & -10 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (34, 17, 34) = 17 \times (2, 1, 2),$$

此時， $(\vec{u} \times \vec{v}) \parallel \overrightarrow{PQ}$ ，且 $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$ ， $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ 。

做一平面 E 包含直線 L 且垂直 $\overrightarrow{PQ}$ ，得平面 E 的方程式為

$$2(x - 1) + (y - 2) + 2(z + 1) = 0,$$

展開後得

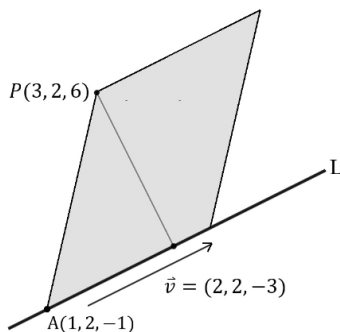
$$2x + y + 2z = 2,$$

則點 P 到直線 L 的距離等於點 P 到平面 E 的距離。

利用點到平面的距離公式，得點 P 到直線 L 的距離

$$\overline{PQ} = d(P, E) = \frac{|2 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 6 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{18}{3} = 6。$$

解法 4：利用外積的長度為平行四邊形面積



已知當 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 為兩個不平行的非零向量時，由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所決定的平行四邊形面積等於外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的長度 $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 。

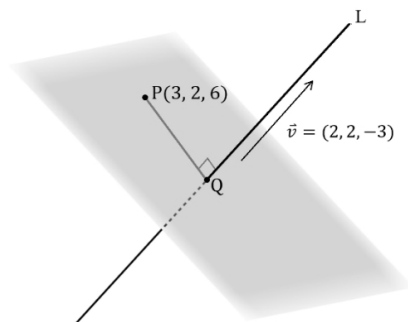
在直線 L 上的取一點 $A(1, 2, -1)$ ，則 $\overrightarrow{AP} = (2, 0, 7)$ 。

設 $\vec{v} = (2, 2, -3)$ 為直線 L 的一個方向向量，則

$$\text{點 } P \text{ 到直線 } L \text{ 的距離} = \frac{\text{由 } \overrightarrow{AP} \text{ 和 } \vec{v} \text{ 所張出的平行四邊形面積}}{\text{底的長度}} = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{14^2 + 20^2 + 4^2}}{\sqrt{17}} = \sqrt{36} = 6。$$

解法 5：做包含點 P 且垂直直線 L 的平面



做一平面 E 包含 $P(3, 2, 6)$ 且垂直直線 L 。

令平面 E 的法向量為直線 L 的方向向量 $\vec{v} = (2, 2, -3)$ ，利用點法式得 E 的平面方程式為

$$2x + 2y - 3z = -8，$$

則直線 L 和平面 E 的交點 Q 為點 P 在 L 上的投影點。

設 $Q(1 + 2t, 2 + 2t, -1 - 3t)$ ，又 Q 在平面 E 上，故

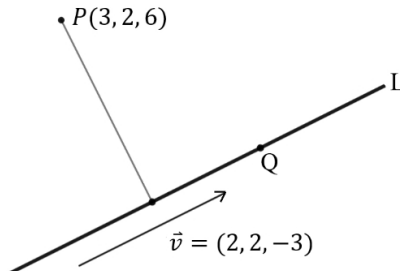
$$2 \times (1 + 2t) + 2 \times (2 + 2t) - 3 \times (-1 - 3t) = -8，$$

得 $t = -1$ ，再得 $Q(-1, 0, 2)$ 。

利用兩點距離公式，得點 P 到直線 L 的距離

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (0 - 2)^2 + (2 - 6)^2} = 6。$$

解法 6：配方法



設 $Q(1 + 2t, 2 + 2t, -1 - 3t)$ 為直線 L 上的一點，則

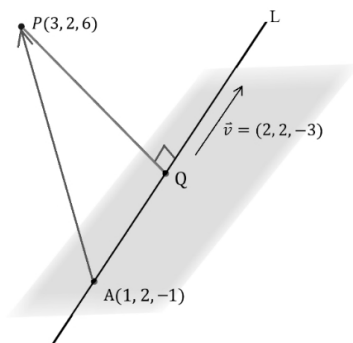
$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{(1 + 2t - 3)^2 + (2 + 2t - 2)^2 + (-1 - 3t - 6)^2} \\ &= \sqrt{17(t^2 + 2t + 1) + 36} = \sqrt{17(t + 1)^2 + 36}。 \end{aligned}$$

當 $t = -1$ 時， $\overline{PQ}$ 有最小值 $\sqrt{36} = 6$ ，此時， $Q(-1, 0, 2)$ 為 P 在直線 L 上的投影點。

利用兩點距離公式，得點 P 到直線 L 的距離

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-2)^2 + (2-6)^2} = 6。$$

解法 7：柯西不等式



設 Q 為 P 在直線 L 上的投影點。由解法 3，得

$$E: 2x + y + 2z = 2 \quad (1)$$

為包含直線 L 且垂直 $\overline{PQ}$ 的平面。此時，點 P 到直線 L 的距離為點 P 到平面 E 的距離。

設平面 E 上任一點 (x, y, z) 到點 P 的距離為 r ，且 $r \geq 0$ ，則

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2 = r^2 \quad (2)$$

利用(1)(2)和柯西不等式知

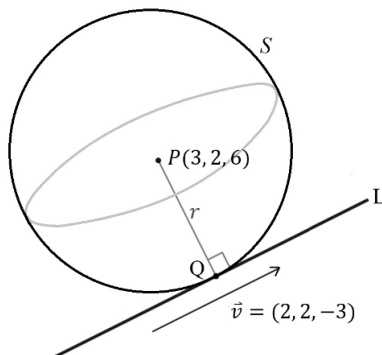
$$[(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2](2^2 + 1^2 + 2^2) \geq (2x + y + 2z - 20)^2，$$

由(1)(2)代入得

$$r^2 \times 9 \geq (2 - 20)^2 = 18^2 \Rightarrow r^2 \geq 6^2 \Rightarrow r \geq 6 \quad (r \leq -6 \text{ 不合})。$$

故點 P 到直線 L 的最小距離為 6。

解法 8：以 P 為球心作球，利用球與直線相切解方程式



考慮以 P 為球心的球面方程式為

$$S: (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = r^2,$$

則球面 S 與直線 L 的交點即為它們方程式的共同解。

設 $Q(1+2t, 2+2t, -1-3t)$ 為它們的交點，因 Q 在球面 S 上，得

$$(1+2t-3)^2 + (2+2t-1)^2 + (-3t-6)^2 = r^2,$$

整理得

$$17t^2 + 34t + (53 - r^2) = 0. \quad (3)$$

(3)式為一個 t 的二次方程式，若球面 S 與直線 L 相切即恰有一交點，則(3)式有唯一解，其充要條件為判別式等於0。

令判別式為0，得

$$D = 34^2 - 4 \times 17 \times (53 - r^2) = 0,$$

解得 $r = 6$ ，代入(3)式得 $t = -1$ ，得到球 S 與直線 L 的切點 $Q(-1, 0, 2)$ 。

此時， $\overline{PQ}$ 垂直 L ， Q 為 P 在 L 上的投影點， $\overline{PQ}$ 為 P 到 L 的最短距離。

由於球面 S 與直線 L 相切時半徑即為球心到切線的距離，故點 P 到直線 L 的距離為6。

解法 9：拉格朗日乘數法

本題解法是利用微積分中的拉格朗日乘數法來求解，它是基於以下定理：

定理[3]：若 m, n 為自然數且 $m < n$ ， V 是 R^n 中的一個開集合，且 $f, g_j, j = 1, 2, \dots, m$ 是從 V 映射至 R 的一階連續可微分函數，設存在 $a \in V$ 使得

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(a) \neq 0.$$

在 $g_k(a) = 0, k = 1, 2, \dots, m$ 的條件下，若 $f(a)$ 是一個極值，則存在常數 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ 使得

$$\nabla f(a) + \sum_{k=1}^m \tau_k \nabla g_k(a) = 0.$$

在最佳化問題中，我們的目標是找到 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在 $g_k(x_1, \dots, x_n) = 0, k = 1, 2, \dots, m$ 的限制條件下的極值。若我們令 $F(x_1, \dots, x_n, \tau_1, \dots, \tau_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \tau_k g_k(x_1, \dots, x_n)$ ，由拉格朗日乘

數法可知，當 $f(x_1, \dots, x_n)$ 有極值時，可得方程組 $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$ 且 $\frac{\partial F}{\partial \tau_i} = 0, i = 1, 2, \dots, m$ 。當

解出上面方程組時，我們即可找到 f 的極值。

根據以上定理，將直線轉為兩面式 $\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases}$ 。

設 $Q(x, y, z)$ 為直線 L 上的一點，則點 P 到直線 L 的距離

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2}。$$

設 $F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2 + \lambda_1(x-y+1) + \lambda_2(3x+2z-1)。$

利用拉格朗日乘數法，得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \text{ 則 } \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-3) + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0。 \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \text{ 則 } \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-2) - \lambda_1 = 0。 \quad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \text{ 則 } \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z-6) + 2\lambda_2 = 0。 \quad (6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0, \text{ 則 } \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x - y + 1 = 0。 \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0, \text{ 則 } \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 3x + 2z - 1 = 0。 \quad (8)$$

由(4)(5)(6)消去 λ_1 、 λ_2 得

$$2x + 2y - 3z = -8。 \quad (9)$$

由(7)(8)(9)得 $x = -1, y = 0, z = 2$ ，得 $Q(-1, 0, 2)。$

因為 $\overline{PQ} = (-4, -2, -4)$ 和直線 L 的方向向量 $\vec{v} = (2, 2, -3)$ 內積為 0，故 $\overline{PQ}$ 和直線 L 垂直，因此點 P 到直線 L 的距離

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-2)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{36} = 6。$$

參、推廣

上節我們探討空間中點到直線距離問題的幾種解法，本節我們將用線性代數與數學分析的觀點來看點到直線的問題並將它推廣至 R^n 中。

設 A, B 為 R^n 中的二點， $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ，定義 $\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)。$

定義：設 $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^n, \vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in R^n, t \in R$ ，我們定義

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$ ， $t\vec{u} = (tu_1, tu_2, \dots, tu_n)$ ， $\vec{u} = \vec{v}$ 為 $u_i = v_i, \forall i = 1, 2, \dots, n。$

容易驗證在 R^n 上定義向量的加法與係數積後會形成一個佈於實數的向量空間[2]。

設 $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ ，對 $\vec{x} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，且 $\vec{y} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ，定義 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 的內積為

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i \circ$$

可以驗證 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 滿足

$$(a) \langle \vec{x} + \vec{z}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle \circ$$

$$(b) \langle c\vec{x}, \vec{y} \rangle = c\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \quad c \in R \circ$$

$$(c) \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \circ$$

$$(d) \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0, \text{ 若 } \vec{x} \neq \vec{0} \circ$$

對 $\vec{x} \in R^n$ ，我們定義 $\vec{x}$ 的範數(norm)或長度(length)為 $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ 。

利用向量的範數，我們可以定義點到集合的最短距離。

設 $P \in R^n$ 空間中一點， P 到非空子集合 S 的最短距離定義為 $\inf\{\|\vec{PQ}\| : Q \in S\}$ 。

以下引理是本節計算的主要工具。

引理： 設 $\vec{a}, \vec{b} \in R^n, t \in R$ ，當 $t = -\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|^2}$ 時， $\|\vec{a} + t\vec{b}\|$ 有最小值 $\sqrt{\frac{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}{\|\vec{b}\|^2}}$ 。

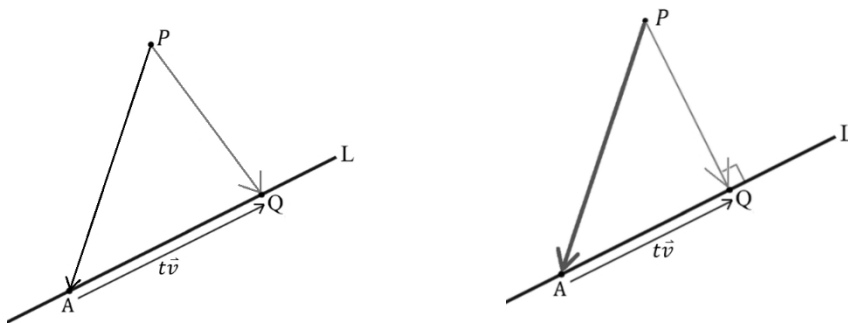
證明： 利用向量內積的分配律，得

$$\begin{aligned} & \|\vec{a} + t\vec{b}\|^2 \\ &= \langle \vec{a} + t\vec{b}, \vec{a} + t\vec{b} \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle t\vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, t\vec{b} \rangle + \langle t\vec{b}, t\vec{b} \rangle \\ &= \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle t^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle t + \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \\ &= \|\vec{b}\|^2 \left(t + \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|^2} \right)^2 + \frac{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}{\|\vec{b}\|^2} \circ \end{aligned}$$

故當 $t = -\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|^2}$ 時，上式有最小值

$$\frac{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}{\|\vec{b}\|^2},$$

得證。



現在我們討論 R^n 中點到直線的距離。

設 A 為 R^n 中一點，我們稱集合 $L = \{Q \in R^n: \overrightarrow{AQ} = t\vec{v}, t \in R\}$ 為通過 A 點且方向向量為 $\vec{v}$ 的一直線。

由點到集合的距離定義可知， P 到直線 L 的最短距離為 $\inf\{\|\overrightarrow{PQ}\|: Q \in L\}$ 。

因為 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{PA} + t\vec{v}$ ，故最短距離為 $\inf\{\|\overrightarrow{PA} + t\vec{v}\|: t \in R\}$ 。

由引理可知，當 $t = -\frac{\langle \overrightarrow{PA}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}$ 時， $\|\overrightarrow{PA} + t\vec{v}\|$ 有最小值

$$\sqrt{\frac{\|\overrightarrow{PA}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{PA}, \vec{v} \rangle^2}{\|\vec{v}\|^2}},$$

即

$$\inf\{\|\overrightarrow{PQ}\|: Q \in L\} = \sqrt{\frac{\|\overrightarrow{PA}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{PA}, \vec{v} \rangle^2}{\|\vec{v}\|^2}}。$$

此外， $t = -\frac{\langle \overrightarrow{PA}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}$ 等價於 $\langle \overrightarrow{PA} + t\vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ ，即 $\overrightarrow{PQ}$ 與直線 L 的方向向量 $\vec{v}$ 垂直時， $\|\overrightarrow{PQ}\|$ 有最小值。

此時， $t\vec{v} = \left(-\frac{\langle \overrightarrow{PA}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\right) \vec{v} = \left(\frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\right) \vec{v}$ 為 $\overrightarrow{AP}$ 在 L 的正射影。

現在，我們以第二節的問題來驗證。

設 $P = (3, 2, 6), A = (1, 2, -1), \vec{v} = (2, 2, -3)$ ，則 $\overrightarrow{PA} = (-2, 0, -7)$ 。

P 到直線 L 距離為

$$\sqrt{\frac{\|\overrightarrow{PA}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{PA}, \vec{v} \rangle^2}{\|\vec{v}\|^2}} = \sqrt{\frac{\|(-2, 0, -7)\|^2 \|(2, 2, -3)\|^2 - \langle (-2, 0, -7), (2, 2, -3) \rangle^2}{17}} = \sqrt{36} = 6。$$

解法 5 在 R^n 的探討：

設 $E: \{U \in R^n: \langle \overrightarrow{PU}, \vec{v} \rangle = 0\}$ 為空間中包含 P 與直線 L 垂直的平面，則 E 與 L 的交點 Q 滿足

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v} \rangle = 0 \\ \overrightarrow{AQ} = t\vec{v} \end{cases}$$

又 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{PA} + t\vec{v}$ ，得 $\langle \overrightarrow{PA} + t\vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ 。由上面的討論，此時 $\|\overrightarrow{PQ}\|$ 有最小值。

解法 8 在 R^n 的探討：

考慮 $C = \{Q \in R^n: \|\overrightarrow{PQ}\| = r\}$ 為 R^n 中與 P 距離 r 的所有點所成的集合。若 C 與 L 相交，則存在 t

使得 $\|\overrightarrow{PA} + t\vec{v}\| = r$ ，由引理得 $\|\overrightarrow{PA} + t\vec{v}\|$ 的最小值為 $\sqrt{\frac{\|\overrightarrow{PA}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{PA}, \vec{v} \rangle^2}{\|\vec{v}\|^2}}$ ，故

$$r \geq \sqrt{\frac{\|\overrightarrow{PA}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{PA}, \vec{v} \rangle^2}{\|\vec{v}\|^2}},$$

故 r 的最小值為 $\sqrt{\frac{\|\overrightarrow{PA}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{PA}, \vec{v} \rangle^2}{\|\vec{v}\|^2}}$ 。

用柯西不等式探討：

令 $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PA} + t\vec{v}$, $t = -\frac{\langle \overrightarrow{PA}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}$ 。由前面討論可知， $\langle \overrightarrow{PH}, \vec{v} \rangle = 0$ 。

設 Q 是直線 L 上一點，則 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{PA} + s\vec{v}$, $s \in R$ ，得 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PH} + (s-t)\vec{v}$ 。

利用柯西不等式[2][3]，得

$$\|\overrightarrow{PQ}\| \|\overrightarrow{PH}\| \geq |\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PH} \rangle|,$$

計算

$$\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PH} \rangle = \langle \overrightarrow{PH} + (s-t)\vec{v}, \overrightarrow{PH} \rangle = \langle \overrightarrow{PH}, \overrightarrow{PH} \rangle + \langle (s-t)\vec{v}, \overrightarrow{PH} \rangle = \langle \overrightarrow{PH}, \overrightarrow{PH} \rangle = \|\overrightarrow{PH}\|^2,$$

故

$$\|\overrightarrow{PQ}\| \geq \|\overrightarrow{PH}\|, \forall Q \in L.$$

所以當 $\overrightarrow{PQ}$ 與直線 L 的方向向量 $\vec{v}$ 垂直時， $\|\overrightarrow{PQ}\|$ 有最小值。

肆、結語

課本中，解空間中點到直線的距離問題，一般解法都會使用向量內積，而部分版本的課本則會額外提供正射影或配方法這兩種方法。而本文中共列出 9 種方法討論空間中點到直線的距離，雖然上述方法不盡相同，但前 4 種皆利用正射影的概念，而後 4 種則利用求距離最小值的方式求解。

使用解法 1、2、4、5、6 這五種方法，都較為平易近人，相對簡單快速好理解。然而，使用解法 7 時，為了有合適的條件，須先使用兩次外積做包含直線 L 且垂直 $\overline{PQ}$ 的平面 E 後，才能帶入柯西不等式，過程較複雜，且計算出平面後也可以直接計算點 P 到平面 E 的距離，不僅較難想到，也不像解平面上點到直線的距離問題時，利用柯西不等式那麼直覺且迅速。

拉格朗日乘數法可以用來求限制條件下的極值問題，而點到直線的距離問題恰為最小值問題，故可使用拉格朗日乘數法求解，但須注意的是，該方法只知道極值而已，雖然點到直線上任意點不會有最大值的問題，但還是需要利用內積為 0 去確認該情況為最小值。

前 7 個解法都屬於高中課綱內的多種應用解法，而後兩者利用到球方程式及拉格朗日乘數法則非課綱內容，理解與使用請自行斟酌。除了以上幾種方法外，也期待讀者能找到更多種方法解題。

最後，我們將空間中點到直線問題延伸至 R^n 中，在推廣中，利用向量內積的運算，我們容易由引理看出第二節中解法 1、2、5、6、8 在本質上是一樣的。然而，由於外積運算為在 R^3 中特有的性質，因此將範圍推廣至 R^n 時，使用外積概念計算的解法 3、4 無法推廣至 R^n 中，而解法 7 的解題過程由於使用到從解法 3 獲得的平面，也無法直接推廣至 R^n 中，不過我們可以利用柯西不等式的向量形式來討論，該方法並無使用外積概念，使得問題在 R^n 中依舊可以討論。

參考資料

許志農(主編)(2021)。普通高級中學數學 4A。新北市，龍騰文化。

簡國清(譯)。線性代數。台北市：東華，2013。(Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence 2003)

William R. Wade, An Introduction To Analysis , Pearson Prentice Hall, 2004.