中學生通訊解題第 119-121 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
11901

求能使得 $n^4+2n^3+4n^2-5n+13$ 為完全平方數的正整數 n。

簡答：3 或 4。

【詳解】

因為 $\left(n^2+n\right)^2=n^4+2n^3+n^2$

且 $\left(n^2+n+2\right)^2=n^4+2n^3+5n^2+4n+4$，

所以對於所有正整數 n，下式恆成立

$\left(n^2+n\right)^2<n^4+2n^3+4n^2-5n+13<\left(n^2+n+2\right)^2$，

又 $n^4+2n^3+4n^2-5n+13$ 為完全平方數，所以

$n^4+2n^3+4n^2-5n+13=\left(n^2+n+1\right)^2$

$\Rightarrow n^2-7n+12=0\Rightarrow (n-3)(n-4)=0$

$\Rightarrow \mathrm{n}=3,4$

【解題評析】

1. n=3, 4 全算對，但推論中沒有說清楚而得 5 分者有三人。
2. 此題藉由不等式及完全平方數證明出原式等於 $\left(n^2+n+1\right)^2$ 即可求解。

問題編號
11902

已知

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$$

，試求

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^5+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^5+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^5$$

的值。

簡答：1

【詳解】

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1\right)+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+1\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{b^2-2bc+c^2-a^2}{2ab}+\frac{c^2+2ca+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2-2ab+b^2-c^2}{2ab}=0$$

$$\Rightarrow \frac{(b-c)^2-a^2}{2ab}+\frac{(c+a)^2-b^2}{2ca}+\frac{(a-b)^2-c^2}{2ab}=0$$

$$\Rightarrow \frac{(b-c+a)(b-c-a)}{2ab}+\frac{(c+a+b)(c+a-b)}{2ca}$$

$$\frac{(a-b+c)(a-b-c)}{2ab}=0$$

$$\Rightarrow \frac{a+c-b}{2abc}(-a(b-c+a)+b(a+b+c)$$
$$+c(a-b-c)) \quad =0$$

$$\Rightarrow (a+c-b)(b^2-(a-c)^2)=0$$

$$\Rightarrow (a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)=0$$

$\Rightarrow a+c-b=0$，或 $a+b-c=0$，

或 $b+c-a=0$

因原式為輪換式，不妨取 $a+c-b=0$

$$(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^5+(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca})^5$$
$$+(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})^5$$

$$=(\frac{b^2-2bc+c^2-a^2}{2bc}+1)^5$$
$$+(\frac{c^2+2ca+a^2-b^2}{2ca}-1)^5$$
$$+(\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{2ab}+1)^5$$

$$=(\frac{(b-c+a)(b-c-a)}{2bc}+1)^5$$
$$+(\frac{(c+a+b)(c+a-b)}{2ca}-1)^5$$
$$+(\frac{(a-b+c)(a-b-c)}{2ab}+1)^5$$

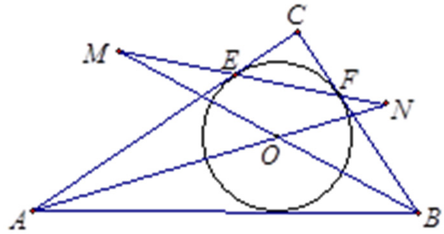
$$=1^5+(-1)^5+1^5=1$$

【解題評析】

此題需先找出滿足的關係式，再利用此關係式求解，解題的過程較為技巧，難度頗高。書寫計算與證明題如同寫篇論說文，敘事必須條理分明，論理必須理由充分，文字必須通順易讀。

問題編號
11903

如右圖在 ΔABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=60°$，圓 O 是 ΔABC 的內切圓，點 E、F 分別是 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 邊上的切點，若射線 $\overrightarrow{AO}$ 與 $\overrightarrow{BO}$ 分別交直線 $\overleftrightarrow{EF}$ 於 N、M，試求 $\Delta OMN, \Delta OAB$ 兩三角形面積的比值。



簡答：$\frac{1}{2}$

詳解：

(1) $\because \angle OAB=15°$、$\angle OBA=30°$，

$\therefore \angle AOM=45°$

$\because \overline{CE}=\overline{CF}$、$\angle C=90°$，

$\therefore \angle CEF=45°$，即 $\angle AEM=45°$，

得 $\angle BMN=15°$

(2)因為 $\Delta OMN \approx \Delta OAB$，

且 A、O、E、M 四點共圓。

$\because \overline{OE} \perp \overline{AC}$ $\therefore \angle AMO=90°$，

所以 $\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

即 $\Delta OMN, \Delta OAB$ 兩三角形面積比值為 $\frac{1}{2}$。

【解題評析】

本題為建國高中數理資優班甄選試題改編，為幾何四點共圓的判定問題，同學不僅需要能確切掌握幾何性質，且能正確利用已知條件進行計算，更重要的是能透過幾何性質的掌握及簡潔完整的表達推理思考過程。

問題編號 11904

今有一數列 $\{a_n\}$ 為 5, 55, 555, ..., 555...5, ...，其中第 n 項 $a_n = 555\cdots5$，為共有 n 個 5 之 n 位數，$n=1, 2, 3, \ldots$ 。試問：這個數列中是否有 2015 的倍數？

簡答：這個數列中有 2015 的倍數。

詳解：

假設數列 $\{a_n\}$ ： 5, 55, 555, ⋯, 555⋯5, ⋯ 中沒有2015的倍數，記 a_k 除以 2015 之餘數為 R_k ， $k=1,2,3,\cdots$ ，則 R_k 為介於 0 與 2015 間之正整數，即 $0<R_k<2015$，最多只有 2014 種可能，而知 $R_1, R_2, \cdots, R_{2015}$ 這 2015 個數中必有相同的數，設 $R_x=R_y=R$，其中 $1\leqq x<y\leqq 2015$，即 a_x 與 a_y 兩項除以 2015 的餘數同為 R；又設其商數分別為整數 A、B，$A<B$，則根據除法原理，$a_x=2015A+R$，$a_y=2015B+R$，得 $a_y-a_x=2015(B-A)=(a_{y-x}\times10^x)$，故 $403\mid(a_{y-x}\times2\times10^{x-1})$，但 403 與 $2\times10^{x-1}10^x$ 互質，得 $403\mid a_{y-x}$，又 $5\mid a_{y-x}$，故 $2015\mid a_{y-x}$，這與「數列 $\{a_n\}$ 中沒有 2015 的倍數」之假設矛盾，得證數列 $\{a_n\}$：5, 55, 555, ⋯, 555⋯5, ⋯ 中有 2015 之倍數。

【解題評析】

這個命題其實等價，將此一事實派上用場，同理，即可證得此數列之前 403 項中即有所要的倍數，而得以大幅度地縮短尋訪區間。

要更進一步定此一詳解採用反證法，假設命題的結論不成立，並由已知條件推理得出如此假設會出現與前提矛盾的結果，從而確認原本的結論為真。此一反證法的優點是思考與論述可以流暢有條理，方便把問題講清楚;缺點是謹知 2015 之倍數存在，但不知此倍數何在。

查核以上證明，可知此數列之前 2015 項中即有所要的倍數，如果我們想再提升查找的效率，此時，「數列 5, 55, 555, ⋯, 555⋯5, ⋯，其中是否有 2015 之倍數」與「數列 1, 11, 111, ⋯, 111⋯1, ⋯，其中有否有 403 的倍數」兩位，還可將 403 因數分解，由於 $403=13\times31$，而六位數 111111 是 13 的倍數，十五位數 111111111111111 是 31 的倍數，合此二者，即知 a_{30} 是 2015 的倍數，並知若自然數 m 是 30 的倍數，則 a_{30} 就是 2015 的倍數。當然，a_6 是 13 的倍數」與「a_{15} 是 31 的倍數」此二性質並非一般所熟知，其中仍有必須討論之處。

問題編號
11905

有 n 個玩具，完全分配給 A, B, C, D, E 五個小朋友，其中

(1) 每個人至少得一個

(2) 所得個數 A< B < C < D < E

(3) 每個人都只知道總數及自己的個數

試找到最小的 n 及一種分配的狀況，使得以上三點分配的原則為公開的資訊，此外再沒有其它資訊的情況下，沒有人可以完全知道所有的分配情形。

簡答：滿足條件的最小 n 為 19。

詳解：

n	分配	可知道的人
15	1 2 3 4 5	ABCDE
16	1 2 3 4 6	ABCDE
17	1 2 3 4 7	DE
17	1 2 3 5 6	DE
18	1 2 3 4 8	DE
18	1 2 3 5 7	E
18	1 2 4 5 6	CE
19	1 2 3 4 9	DE
19	1 2 3 5 8	E
19	1 2 3 6 7	D
19	1 2 4 5 7	都不知
19	1 3 4 5 6	BE

所以可以滿足條件的最小 n 為 19，分配如表格。

【解題評析】

這樣的題目主要的重點有兩個，第一個重點從小數字著手，系統性的舉出所有情形，第二個是針對固定的 n 值，列出所有的可能情形，分析每個人能不能分辨的狀況，針對這個重點，最重要的就是列出所有的可能，如果沒有列出所有的可能，就無法分辨出誰可以或不可以完全知道，另外，系統性的把狀況用表格列出來，有助於分析的效率，大多數作答的同學對於題意的理解及重點的掌握還可以多練習，全對的同學，作法雖有不同，不過都能用自己的分析方式討論出來，頗具水準。

問題編號
12001

已知 x 是十進位制的正整數，並且它的各位數字的乘積為 $P(x)$，試求滿足 $P(x)=x^2-10x-22$ 的所有正整數 x。

簡答：$x=12$。

詳解：

[方法 1]

若 x 是一個十進位制且滿足本題條件的 $n(n=1,2,3,\cdots)$ 位正整數，則

$10^{n-1}\le x$，且 $P(x)\le 9^n$，以下分 $n=1$，$n=2$ 和 $n\ge 3$ 討論滿足的正整數 x：

(1) 當 $n=1$ 時，$x=P(x)=x^2-10x-22$

$\Rightarrow x^2-11x-22=0$ 這個二次方程式

沒有整數解。

(2) 當 $n=2$ 時，

$P(x)=x^2-10x-22=(x-5)^2-47\le 9^2=81$

$\Rightarrow (x-5)^2\le 128$

$\Rightarrow |x-5|\le\sqrt{128}<12$，

又因 $x\ge 10^{2-1}=10$，故有 $10\le x\le 16$。但此數要滿足 $P(x)+47=(x-5)^2$，所以，只有 $x=12$ 滿足所有條件。

(3) 當 $n\ge 3$ 時，

$0<10^{n-1}-5\le x-5$

$\Rightarrow (10^{n-1}-5)^2\le (x-5)^2$，

所以，

$P(x)=x^2-10x-22=(x-5)^2-47$

$\ge (10^{n-1}-5)^2-47$，

$P(x)\ge (10^{n-1}-5)^2-47$

$=10^{2n-2}-10^n-22$，

由 $10^n\ge 10^3=1000$ 和 $10^{n-2}-2\ge 8$，

得 $10^n(10^{n-2}-2)=10^{2n-2}-2\cdot 10^n\ge 8000$。

因此，

$P(x)\ge 10^{2n-2}-10^n-22$

$=10^{2n-2}-2\cdot 10^n+10^n-22$

$\ge 8000+10^n-22>10^n$。

但這和不等式 $P(x)\le 9^n$ 矛盾。

綜上所述，本題只有一解 $x=12$。

[方法 2]

改編自臺中市明道國中同學作法

(1) 由於

$P(x)\ge 0$ 且 $x\ge 0\Rightarrow P(x)+x\ge 0$

$\Rightarrow x^2-9x-22>0$

(2) 證明 $P(x)\le x$：

若 x 是一個十進位制且滿足本題條件的 $n(n=1,2,3,\cdots)$ 位正整數，

設 $x=a_1a_2a_3\ldots a_n$，其中 $a_1a_2a_3\ldots a_n$ 分別為 x 的各位數字，

且 $1\le a_1\le 9$，$0\le a_2,a_3,\ldots,a_n\le 9$。

故 $\forall n\ge 1$，

$x=a_1a_2a_3\ldots a_n\ge a_1\times 10^{n-1}$

$\ge a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_n=P(x)$。

(3) $P(x)\le x\Rightarrow x^2-10x-22\le x$

$\Rightarrow x^2-11x-22\le 0$

$\Rightarrow -2<\dfrac{11-\sqrt{209}}{2}\le x\le\dfrac{11+\sqrt{209}}{2}<13$

$\Rightarrow 1\le x\le 12$。

綜上所述，本題只有一解 $x=12$，檢查後滿足所有條件，故 $x=12$。

【解題評析】

1. 本題徵答人數比預期踴躍共有 17 人，其中有 13 位獲 7 分滿分，平均得分 6.12 分，得分名單如下。
2. 本題大部分同學都掌握了題意，且使用了[方法 1]或[方法 2]其中之一，或兩種方法都使用了部分，而得出了正確答案。得 5 分同學答案雖然正確，可惜說理不夠清楚而扣分；得滿分 7 分同學在數學符號的表達與論證計算的過程都表現得完整清楚，值得肯定。
3. 新北市江翠國中蕭同學，用同餘討論出 x 只會由 $1,2$ 所組成，是個有趣的結論，將其作法摘錄如下：

   (1) 由於十進位制中各位數字必定介

於 $0 \sim 9$ 之間，故 $P(x)$ 的質因數只有 $2,3,5,7$ 。

(2) $P(x)=x^2-10x-22 \equiv x^2(\bmod 2)$ ，所以 $P(x)$ 可以有質因數 2 。

(3) $P(x)=x^2-10x-22=x^2+2x+2$
$=(x+1)^2+1(mod3)$，
由於，$(x+1)^2 \equiv 2(mod3)$ 不可能發生，所以 $P(x)$ 不會有質因數 3。

(4) $P(x)=x^2-10x-22$
$\equiv x^2+3(mod5)$，

(5) $P(x)=x^2-10x-22$
$\equiv x^2+4x+6 \equiv (x+2)^2+2(mod7)$ ，
由於，$x^2 \equiv 2(mod5)$ x^2 不可能發生，所以 $P(x)$ 不會有質因數 7。

綜上所述， x 只會由 1, 2 所組成。

問題編號
12002

若方程式 $x^2-px-q=0$ 的正根小於 4，其中 p,q 為正整數，則滿足上述條件的數對 (p,q) 共有幾組解？

簡答：21 組解。

詳解：

因為判別式 $\Delta=p^2+4q>0$ ，所以方程式有實根。

又 q 為正整數，兩根之積 $=-q<0$ ，因此得到原方程式兩根為一正一負。

設 $f(x)=x^2-px-q$ ，

則 $f(4)=16-4p-q=16-(4p+q)>0$ ，故 $4p+q<16$ ，由此可知 $p<4$ 。

而當 $p=1$時， $0<q\le 11$ ，

當 $p=2$時， $0<q\le 7$ ，

當 $p=3$時， $0<q\le 3$。

故一共有 21 組解。

【解題評析】

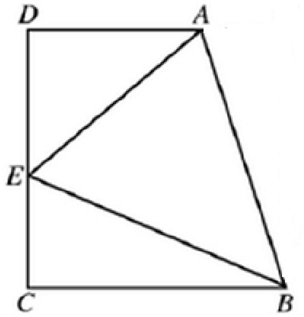
本題為全國數學能力競賽試題改編，屬於方程式根的性質判定問題，同學不僅能確切掌握代換性質，且能正確計算符合條件的解答數，更重要的是能透過對於不等式性質的掌握及簡潔完整的表達相關的計算過程。本題徵答人數極為踴躍共有 18 人，其中有 16 位獲 7 分滿分。整體而言參與徵答學生的推理思考與表達方法均十分優異，值得肯定。許多同學亦採用組合計算模式而解出正確數值。

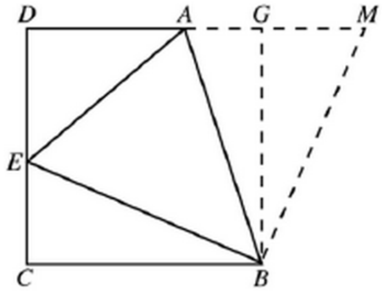
問題編號
12003

在梯形 $ABCD$ 中，$\overline{BC}//\overline{AD}(\overline{BC}>\overline{AD})$，$\angle D=90^0$ ， $\overline{BC}=\overline{CD}=6$ ，已知點 E 在線段 $\overline{CD}$ 上，且 $\angle ABE=45°$ ，若 $\overline{AE}=5$，試求 $\overline{CE}$ 的長。

簡答： 2 或 3。

詳解：下圖所示：





延長 $\overline{DA}$ 至 M，使 $\overline{BE} \perp \overline{BM}$，

過 B 作 $\overline{BG} \perp \overline{AM}$，

因為 $\overline{BC} = \overline{CD}$，所以四邊形 $BCDG$ 為正方形，則 $\overline{BC} = \overline{BG}$，

由 $\angle CBE + \angle EBG = 90° = \angle EBG + \angle GBM$，

可得 $\angle CBE = \angle GBM$，

$\therefore \triangle BEC \cong \triangle BMG$，

則 $\overline{BM} = \overline{BE}, \angle ABE = \angle ABM = 45^0$，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ABM$，則 $\overline{AM} = \overline{AE} = 5$，

設 $\overline{CE} = x = \overline{GM}$，則 $\overline{AG} = 5 - x$，

且 $\overline{AD} = 6 - (5 - x) = 1 + x$，$\overline{DE} = 6 - x$，

在 $\triangle ADE$ 中，$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2$，

即 $5^2 = (1+x)^2 + (6-x)^2$，

可得方程式

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2$$

或 3，

故 $\overline{CE}$ 的長為 2 或 3。

【解題評析】

1、答對的同學大部份皆如詳解畫輔助線的方法解出。

2、此題屬於較簡單的幾何試題，同學於解法中都能利用三角形全等的性質說清楚一些關係。

問題編號
12004

2015 個都不等於 119 的正整數 $a_1, a_2, \cdots, a_{2015}$ 排成一數列，其中任意連續若干項之和都不等於 119，求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015}$ 的最小值。

簡答：3919。

詳解：

首先證明：

對於任意 119 個正整數 $b_1, b_2, \cdots, b_{119}$，其中一定存在若干連續項的和是 119 的倍數。

考慮如下 119 個正整數：

$$b_1, b_1 + b_2, \cdots, b_1 + b_2 + \cdots + b_{119},$$

若其中有一個是 119 的倍數，則結論成立。

若其中沒有一個是 119 的倍數，則它們除以 119 所得之餘數只能為 1,2,…,118 這 118 種情況，所以其中一定有兩個除以 119 所得之餘數相同。

不妨設為 $b_1 + b_2 + \cdots + b_i$ 和 $b_1 + b_2 + \cdots + b_j$ $(1 \le i < j \le 119)$，

於是 $119\,|\,b_{i+1}+\cdots+b_j$ ，從而結論成立。

對於 $a_1,a_2,\cdots,a_{2015}$ 中的任意 119 個正整數，由上述結論得知必有若干連續項的和是 119 的倍數，但其不等於 119，所以它 $\geq 2\times 119$。

又因為$2015=16\times 119+111$ ，

所以

$a_1+a_2+\cdots+a_{2015}\ \geq 16\times 238+111=3919$ ……(*)，

取$a_{119}=a_{238}=\cdots=a_{1904}=120$ ，

其餘的數都為 1 時，(*)式等號成立。

所以$a_1+a_2+\cdots+a_{2015}$的最小值為 3919 。

【解題評析】

本題屬於中偏難的題目，一種做法是利用鴿籠(抽屜)原理。有些同學以為這些整數都相異，有些則一廂情願的列出某情況即宣稱其為解，疏忽了其中的謬誤。希望同學們以後不論遇到什麼樣的題目，都要抱著耐心、謹慎、不視為理所當然的態度。

問題編號 12005

設 x 為正實數，且 $n=\sqrt[3]{3+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{x}}$，而 n 為正整數，求 x 之值。

簡答：$\dfrac{368}{27},\dfrac{242}{27}$ 。

詳解：

令 $a=\sqrt[3]{3+\sqrt{x}},b=\sqrt[3]{3-\sqrt{x}}$ ，則 $a+b=n$，

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$\Rightarrow\ 3+\sqrt{x}+3-\sqrt{x}=n^3-3abn=6$$

$$\Rightarrow\ ab=\frac{n^3-6}{3n}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[3]{9-x}=\frac{n^2}{3}-\frac{2}{n}<\sqrt[3]{9}<3$$

又 n 為正整數，則 $n=1,2,3$

(1) $n=1$，則 $ab=\dfrac{-5}{3}=\sqrt[3]{9-x}$ ，

則 $x=\dfrac{368}{27}$

(2) $n=2$，則 $ab=\dfrac{1}{3}=\sqrt[3]{9-x}$ ，

則 $x=\dfrac{242}{27}$

(3) $n=3$，則 $ab=\dfrac{7}{3}=\sqrt[3]{9-x}$ ，

則 $x=\dfrac{-100}{27}$(不合)

$\therefore\ x=\dfrac{368}{27},\dfrac{242}{27}$

【解題評析】

此題屬於數論問題。不少同學誤以為「n 為正整數且 $n\cdot m=6$，則 $n=1,2,3,6$」即無形中認定「m 也為正整數」，事實上這是錯誤的！$n=12,\ m=\dfrac{1}{2}$ 即為一個反例。因此必須借由「x 為正實數」之條件確定正整數 n 之範圍，才算是完整作答。有些同學相當細心的推導出正整數 n 之範圍且算出正確答案，獲得 7 分的滿分；有些同

學雖然得到正確答案，卻犯了上述錯誤，獲得 5 分；有些同學差點得到正確答案卻也犯了上述錯誤，獲得 3 分；有同學思考方向錯誤，獲得 1 分。

問題編號
12101

試求正整數 x，滿足 $(x-4)(x-8)-31$ 是完全平方數。

簡答：24 或 12。

詳解：

設 $(x-4)(x-8)-31=m^2$, m 是正整數

$\Rightarrow x^2-12x+1=m^2$

$\Rightarrow (x-6)^2-m^2=35$

設 $x-6=k$

$\Rightarrow k^2-m^2=35$

$\Rightarrow (k-m)(k+m)=35=1\cdot 35=5\cdot 7$

故 $(k-m, k+m)$ 只有 $(1,35)$，$(5,7)$，$(-35,-1)$，$(-7,-5)$ 四種可能，

得 $k=18, 6, -18, -6 \quad \Rightarrow x=24, 12, -12$ (不合), 0(不合)

【解題評析】

本題屬於容易的數論題目，參與徵題的同學不少。只要掌握住基本的因式分解公式與整數的因數拆解，不難迎刃而解。惟須謹慎列出所有的可能性。希望同學們以後不論遇到什麼樣的題目，都要謹慎細心。

問題編號
12102

設 a,b,c,d,e,f,g 皆是非負實數，滿足等式 $a+b+c+d+e+f+g=1$，

試求 $\max\{a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+g\}$ 的最小可能值。

簡答：$\dfrac{1}{3}$。

詳解：

註：這裡 max 是表示大括號中 5 個數中的最大數。因此，這題是要估計這 5 個數中最大數的最小可能值。

設大括號中的最大數為 M，則

$M \ge \dfrac{1}{3}[(a+b+c)+(c+d+e)+(e+f+g)]$

$=\dfrac{1}{3}[(a+b+c+d+e+f+g)+(c+e)]$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{c+e}{3} \ge \dfrac{1}{3}$，可見 $M \ge \dfrac{1}{3}$。

另令 $a=d=g=\dfrac{1}{3}$ 及 $b=c=e=f=0$，

則 $a+b+c=\dfrac{1}{3}, b+c+d=\dfrac{1}{3}, c+d+e=\dfrac{1}{3}, d+e+f=\dfrac{1}{3}, e+f+g=\dfrac{1}{3}$,

所以，$\max\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}=\frac{1}{3}$，因而，確有某個 $M=\dfrac{1}{3}$，所以最小值為 $\dfrac{1}{3}$。

【解題評析】

本題設 a,b,c,d,e,f,g 皆是非負實數，滿足

等式 $a+b+c+d+e+f+g=1$，欲求 $\max\{a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+g\}$ 最小可能值，設大括號 5 個數中的最大數為 M，必須證明：

(1) $M \ge \frac{1}{3}$；

(2) 可能最小值為 $\frac{1}{3}$，代表確實有某組數 a,b,c,d,e,f,g 使得 $M=\frac{1}{3}$。

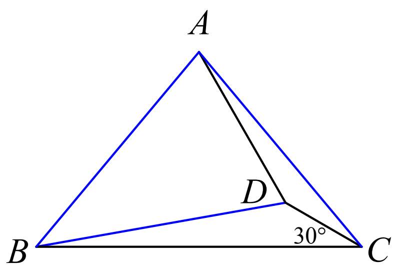
得滿分 7 分的同學是有完整證明(1)、(2)兩部分，且都有用數學語言完整的論證。而得 3 分的同學只得出(2)但未嚴格證明(1)。雖然大部分都有類似以下的論證：

> 令
>
> $a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+g$
> 五數中由大到小依序為 A,B,C,D,E，
> 即 $A \ge B \ge C \ge D \ge E$，
> 可知，若 $A=B=C=D=E$ 時，
> (越平均越好；將最大的減小、最小的增大的方法)
> A 才可能為最小可能值。
> 所以，$a=d=g$，且 $b=c$，且 $e=f$，…。

但是，什麼是越平均越好；將最大的減小、最小的增大的方法呢？此外，A 未必是 $a+b+c$，B 未必是 $b+c+d$，同理，C,D,E 未必是 $c+d+e, d+e+f, e+f+g$，所以是如何推出 $a=d=g$，且 $b=c$，且 $e=f$ 的呢？諸如此類的細節都沒有交代，所以雖然同學們有些想法但沒有具體用數學語言證明，老師閱卷不可能幫你們補上這些細節，所以只能當作你們沒有證出來。還有，由於本題容易直觀猜出最小可能值，會使同學們以為完成題目而忽略完整論證 $M \ge \frac{1}{3}$ 的重要性。最後，提醒同學們下次再看到類似的題型，要注意不能因為直觀可猜出最小可能值，就用不嚴謹的語言略過了不等式部分的論證喔！

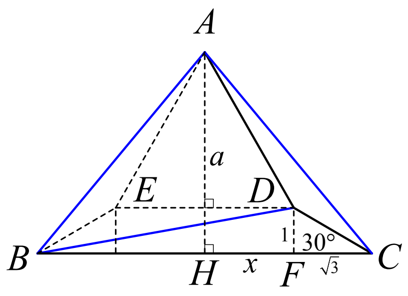
問題編號
12103

如圖，在等腰三角形 ΔABC 中取得一點 D，使得 $\overline{DB}=\overline{AB}=\overline{AC}$ 且 $\angle DCB=30°$，試求出 $\angle ADC$ 度數。



簡答： 150。

詳解：



(1) 作 $\Delta ABE \cong \Delta ACD$，則 ΔADE 為等腰三角形，$BEDC$ 為等腰梯形

(2) 作 $\overline{AH}$, $\overline{DF}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 H, F

(3) 令 $\overline{CF}=\sqrt{3}$, $\overline{DF}=1$, $\overline{HF}=x$,

$\overline{AH}=a+1$

由 $\overline{DB}=\overline{AB}$ 得：

$(2x+\sqrt{3})^2+1^2=(x+\sqrt{3})^2+(a+1)^2$

$\Rightarrow\ 3x^2+2\sqrt{3}x+1=a^2+2a+1$

$\Rightarrow\ (\sqrt{3}x+1)^2=(a+1)^2$

$\Rightarrow\ a=\sqrt{3}x$

$\Rightarrow\ \angle ADE=60°$

$\Rightarrow\ \angle ADC=150°$

問題編號
12104

黑板上寫有 1, 2, 3, 4, …, 2015 等 2015 個正整數，進行操作如下：

第一步：刪去最前面兩個數 1, 2，並在最後面寫上這兩個數的和；

第二步：刪去最前面三個數 3, 4, 5，並在最後面寫上這三個數的和；…

第 k 步：刪去最前面 個數，並在後面寫上這 個數的和，直至無法進行，即欲進行第 n 步時，黑板上的數字個數不足 $n+1$。試求：黑板上出現過的不同數字共有多少個？這些數字的和為多少？(每個出現過的不同數字，都只計算一次)

簡答：2063 個，4055100。

詳解：

(1) 進行第 k 步後，黑板上即減少 k 個數

$1+2+3+\cdots+(n-1)<2015<1+2+3+\cdots+(n-1)+n$

$\Rightarrow n(n-1)<4030<n(n+1)$

所以 $n=63$

即最多只能進行到第 62 步

(2) 寫上的數為

$$\frac{k(k+1)}{2}(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{2}$$

當 $k\le 14$ 時，$\dfrac{k(k+1)(k+2)}{2}<2015$

且當 $k=15$ 時，$\dfrac{k(k+1)(k+2)}{2}=2040$

所以，前 14 步所寫的數均小於 2015，第 15 步所寫的數為 2040，之後所寫的數均大於 2040。

故出現的不同數字共有

2015 + 62 – 14 = 2063 個

(3) 第 62 步，刪去的數為 1953, 1954, …, 2015 等 63 個數字，而寫上的數為

$\dfrac{(1953+2015)\times 63}{2}=124992$，

故黑板上所有出現過的不同數字和為

$$\frac{(1+2015)\times 2015}{2}+\frac{(1+2015)\times 2015}{2}-\sum_{k=1}^{14}\frac{k(k+1)(k+2)}{2}=4055100$$

【解題評析】

本題題目需要同學細心找尋規律，大部分參與答題的同學都說明得很清楚，有 7 人得滿分，未得滿分的情況：(1) 計算錯誤，答案差太多 (2) 在計算所有出現過的數的總和時，須知道第 15 步起出現的數均大於 2015，為未出現過的新數 (3) 弄錯題意。整體而言，答題狀況皆非常好。

問題編號 12105

若 x, y, z 不全相等，

且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=p$。求所有可能的 p 值，並證明 $xyz+p=0$。

簡答： $p=\pm 1$。

詳解：

$p=\pm 1$。

首先由 x, y, z 不全相等，可推得它們必互不相等。

事實上，若 $x=y$，則 $x+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{z}$，從而 $x=z \Rightarrow x=y=z$，矛盾！

由 $p=z+\frac{1}{x}$ 及 $x=p-\frac{1}{y}$ 得 $p=z+\frac{y}{yp-1}$。

再由 $y=p-\frac{1}{z}$，

得 $p^3-(z+\frac{1}{z})p^2-p+(z+\frac{1}{z})=0$，整理

得 $(p-1)(p+1)\left[p-(z+\frac{1}{z})\right]=0$。若 $p=z+\frac{1}{z}$，則 $x=z$，這與假設矛盾，所以 $p=\pm 1$。由 $x+\frac{1}{y}=p$，

得 $xyz=z(yp-1)$　　(1)

而 $y=p-\frac{1}{z}$，故 $yp=p^2-\frac{p}{z}$，由(1)得

$xyz+p=z(p^2-\frac{p}{z}-1)+p=0$。

【解題評析】

1. 本題目有幾個重點，首要說明 x, y, z 必互不相等。第二是運用代數運算得到 $(p-1)(p+1)\left[p-(z+\frac{1}{z})\right]=0$ 或 $(p-1)(p+1)(z^2-pz+1)=0$ 或其他類似的等式，再來由討論得到 $p=\pm 1$。第三是說明 $xyz+p=0$。
2. 本題主要是藉由代換的方式來解題，故有許多種解法可以求出 p 的可能值，所以只要思路清楚，都能得到正確的答案。有些同學作答過程會過於簡化，提醒有這種情形的同學，在解題的過程中要呈現重要的步驟，否則就是說明不清楚。