從一個非負的二次型談起

連威翔

壹、前言

在數學傳播 32 卷 1 期的[1]文最後的[註四]中，作者寫下

$$\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2=\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\alpha^2\geq 0, \tag{1}$$

以說明文章第一頁第四段所敘述之當 $\beta>\alpha$ 時 $\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2+p$ 恆正的結果，其中 p 為正數。對於(1)式，若考慮 α,β 可為任意實數的情形，則由(1)式中配方的結果可知(1)式等號成立的充要條件是 $\alpha=\beta=0$，因此 $\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2$ 是個恆不取負值的二次型。

在 α,β 為任意實數的情況下，其實還有其他方法可證明(1)式成立，此處筆者再介紹兩種方法。第一種方法，是利用三一律進行討論，先考慮 $\beta=\alpha$ 的情形，此時有

$$\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2=3\alpha^2\geq 0;$$

接著考慮 $\beta>\alpha$ 的情形，此時 $\beta^3>\alpha^3$，因此有

$$\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2=\frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha}>0;$$

最後考慮 $\beta<\alpha$ 的情形，此時 $\beta^3<\alpha^3$，因此可知

$$\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2=\frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha}>0.$$

透過以上三式的討論結果，我們就知道(1)式恆成立。

至於第二種方法，我們可以先設法找到實數 p,q 滿足

$$\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2=p(\beta+\alpha)^2+q(\beta-\alpha)^2. \tag{2}$$

將(2)的右式展開，合併同類項後比較(2)式等號兩側的係數，可知 $p=\frac{3}{4},q=\frac{1}{4}$，故可推得

$$\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2=\frac{3}{4}(\beta+\alpha)^2+\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2\geq 0, \tag{3}$$

因此(1)式成立。

而若考慮一般情況下的實係數二次型 $ax^2+bxy+cy^2$，其中常數 a,b,c 與變數 x,y 均為實數，此時若要判斷 $ax^2+bxy+cy^2$ 之值域，則可從一個與(2)式類似的假設開始，然後再透過討論得到結果。底下第二節的內容，將介紹這個判定 $ax^2+bxy+cy^2$ 之值域的方法供讀者參考。

貳、二次型 $ax^2+bxy+cy^2$ 之值域判別

對於實係數二次型 $ax^2+bxy+cy^2$，我們可仿照(2)式的方式，假設

$$ax^2+bxy+cy^2=A(\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y)^2+B(\sin\theta\cdot x-\cos\theta\cdot y)^2, \tag{4}$$

其中 A,B,θ 為實數，且 $0\le\theta<2\pi$。其實此處我們可以進一步取 $0\le\theta<\pi$，這是因為若

$$ax^2+bxy+cy^2=A(\cos\eta\cdot x+\sin\eta\cdot y)^2+B(\sin\eta\cdot x-\cos\eta\cdot y)^2, \tag{5}$$

其中 $\pi\le\eta<2\pi$，則我們可令 $\eta=\theta+\pi$，因此 $0\le\theta<\pi$，而上式可改寫為

$$\begin{aligned}ax^2+bxy+cy^2&=A(-\cos\theta\cdot x-\sin\theta\cdot y)^2+B(-\sin\theta\cdot x+\cos\theta\cdot y)^2\\&=A(\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y)^2+B(\sin\theta\cdot x-\cos\theta\cdot y)^2,\end{aligned}$$

如此便將(5)式改寫為(4)式，並符合(4)式所設定的條件。因此，接下來對於(4)式我們就只看 $0\le\theta<\pi$ 範圍中的 θ 值。

注意(2)左式就是(4)左式取 $a=b=c=1$ 與 $x=\beta,y=\alpha$ 的結果，而(2)右式則是(4)右式取 $A=2p,B=2q,\theta=\frac{\pi}{4}$ 與 $x=\beta,y=\alpha$ 的結果，其中 θ 值已先行確定為 $\frac{\pi}{4}$。

對於二次型 $ax^2+bxy+cy^2$，我們知道 a,b,c 不全為零。此時將(4)式等號右邊展開，經整理後結果如下：

$$ax^2+bxy+cy^2=(A\cos^2\theta+B\sin^2\theta)x+2(A-B)\sin\theta\cos\theta\,xy+(B\cos^2\theta+A\sin^2\theta)y.$$

比較上式等號兩側的係數，可得

$$a=A\cos^2\theta+B\sin^2\theta, \tag{6}$$

$$b=2(A-B)\sin\theta\cos\theta, \tag{7}$$

$$c=B\cos^2\theta+A\sin^2\theta. \tag{8}$$

我們可利用上面三式找出 A,B,θ 三數與 a,b,c 三數的關係，然後再判斷(4)左式的二次型 $ax^2+bxy+cy^2$ 之值域為何。首先計算(6) + (8)，可得

$$a+c=A+B. \tag{9}$$

接著計算(6) − (8)，整理後可得

$$a-c=(A-B)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=(A-B)\cos 2\theta, \tag{10}$$

此時並將(7)式改寫為

$$b=(A-B)\sin 2\theta. \tag{11}$$

計算$(10)^2+(11)^2$，可得

$$(a-c)^2+b^2=(A-B)^2, \tag{12}$$

再計算$(12)+(9)^2$，整理後可得

$$2a^2+2c^2+b^2=2(A^2+B^2). \tag{13}$$

因為 a,b,c 不全為零，由(13)式知 $2(A^2+B^2)=2a^2+2c^2+b^2>0$，此時我們確定了 A,B 兩數不全為零的事實。而若計算$(12)-(9)^2$，則有

$$b^2-4ac=-4AB, \tag{14}$$

上式中出現了大家應該都不陌生的 b^2-4ac，這裡我們不妨同樣稱它為(4)式中的二次型 $ax^2+bxy+cy^2$ 之判別式。

不過在推導得上述各式後，此時我們應該問一個問題，即(4)式中的 A,B,θ 是否有解？此問題的答案是肯定的，我們可利用(12)式寫下

$$|A-B|=\sqrt{(a-c)^2+b^2}.$$

因此可知當 $A\geq B$ 時，有

$$A-B=\sqrt{(a-c)^2+b^2},$$

而當 $A\leq B$ 時，則有

$$A-B=-\sqrt{(a-c)^2+b^2}.$$

以上兩式搭配(9)式求解 A,B，可知當 $A\geq B$ 時，有

$$(A,B)=\left(\frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2},\frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}\right); \tag{15}$$

當 $A\leq B$ 時，則有

$$(A,B)=\left(\frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2},\frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}\right). \tag{16}$$

有了(15),(16)兩式中 A,B 的表達式之後，接下來我們分成兩種情況討論(4)式中的 θ 該如何取值或者如何以 a,b,c 三數表示。

第一種情況：

當 $(a-c)^2+b^2>0$ 時，可先確定 $a-c$ 與 b 兩數不全為 0，接著由(12)式可知 $A\neq B$，因此 $A>B$ 或 $A<B$。當 $A>B$ 時，選(15)式；當 $A<B$ 時，選(16)式。由於 $A-B\neq 0$，利用(10)式知當 $a-c=0$ 時，需取 $\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ 使 $\cos 2\theta=0$。至於該選 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{4}$，則要搭配(11)式來判斷。注意此時 $b\neq 0$，利用(11)式可知當 b 與 $A-B$ 同號時，$\sin 2\theta>0$，因此取 $\theta=\frac{\pi}{4}$；而當 b 與 $A-B$ 異號時，$\sin 2\theta<0$，因此取 $\theta=\frac{3\pi}{4}$。

另一方面，由於 $A-B\neq 0$，利用(11)式知當 $b=0$ 時，需取 $\theta=0,\frac{\pi}{2}$ 使 $\sin 2\theta=0$。至於該選 $\theta=0$ 或 $\theta=\frac{\pi}{2}$，則要搭配(10)式來判斷。注意此時 $a-c\neq 0$，利用(10)式可知當 $a-c$ 與 $A-B$ 同號時，$\cos 2\theta>0$，所以取 $\theta=0$；當 $a-c$ 與 $A-B$ 異號時，$\cos 2\theta<0$，所以取 $\theta=\frac{\pi}{2}$。

最後，當 $a-c\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 時，由於 $A-B\neq 0$，可計算(11) ÷ (10)得到

$$\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}, \tag{17}$$

因此取

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{b}{a-c} \tag{18}$$

即可滿足(17)式，其中 $0<\theta<\pi$ 且 $\theta\neq\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$。為什麼呢？注意正切函數 $\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$ 這三個開區間上都有定義且都是嚴格遞增，因此在三個開區間內函數 $\tan x$ 各自有反函數，而 $\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$ 的值域分別為所有正實數、所有實數與所有負實數，所以三個值域的聯集(所有實數)必然將非零實數 $\frac{b}{a-c}$ 包含在內，因此(18)式中的 θ 值存在且滿足 $0<2\theta<2\pi$ 且 $2\theta\neq\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$，得 $0<\theta<\pi$ 且 $\theta\neq\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$。

注意選擇(15)式與(16)式時所對應到 θ 之取值範圍不同，因為 $A-B\neq 0$ 且 $b\neq 0$，當 $A>B$ 時選擇(15)式，此時若 $b>0$，由(11)式知 $\sin 2\theta>0$，因此 $0<2\theta<\pi$，故 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$；而若 $b<0$，由(11)式知 $\sin 2\theta<0$，因此 $\pi<2\theta<2\pi$，故 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$。相對地，當 $A<B$ 時選擇(16)式，此時若 $b>0$，由(11)式知 $\sin 2\theta<0$，因此 $\pi<2\theta<2\pi$，故 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$；而若 $b<0$，由(11)式知 $\sin 2\theta>0$，因此 $0<2\theta<\pi$，故 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$。第一種情況的討論至此結束。

第二種情況：

當 $(a-c)^2+b^2=0$ 時，有 $b=a-c=0$，此時由(10),(11)兩式可知

$$(A-B)\cos 2\theta=(A-B)\sin 2\theta=0.$$

又 $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ 不能同時等於 0，故 $A-B=0$，即 $A=B$。此時，由(6),(7),(8)三式可推得 $a=c=A=B$ 且 $b=0$。因此，

$$(A,B)=\left(\frac{a+c}{2},\frac{a+c}{2}\right)=(a,a),$$

注意此時 θ 以任一個角度代入(4)式，均可得

$$ax^2+bxy+cy^2=a(x^2+y^2)^2.$$

第二種情況的討論至此結束。

透過以上兩種情況的討論內容，我們就確定(4)式中的 A,B 總是可利用 a,b,c 來表示，而 θ 則總是可以從 $0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}$ 四數中取值或以 a,b,c 三數表示之。接下來我們回到(14)式，並分成三種情況討論如下：

(a) 若 $b^2-4ac=0$，則 $ax^2+bxy+cy^2$ 的值域為 $[0,\infty)$ 或 $(-\infty,0]$：

首先由(14)式知 $AB=0$，由於 A,B 兩數不全為零，因此知 A,B 兩數之中恰有一數為 0。此時 $b^2=4ac$，我們將其代入(15),(16)兩式後，可知當 $A\geq B$ 時，有

$$(A,B)=\left(\frac{a+c+|a+c|}{2},\frac{a+c-|a+c|}{2}\right), \tag{19}$$

而當 $A\leq B$ 時，則有

$$(A,B)=\left(\frac{a+c-|a+c|}{2},\frac{a+c+|a+c|}{2}\right). \tag{20}$$

上面提到 A,B 兩數之中恰有一數為 0，若 $A=0, B\neq 0$，則由(4)式可知

$$ax^2+bxy+cy^2=B(\sin\theta\cdot x-\cos\theta\cdot y)^2. \tag{21}$$

上式中當 $B>0$ 時，我們有 $B>A=0$ 的條件，因此應取(20)式，且此時由(9)式可知 $a+c=B+A=B>0$。由於 $B>0$，因此由(21)式知 $ax^2+bxy+cy^2\geq 0$，其中取 $x=y=0$ 可得 $ax^2+bxy+cy^2=0$。而對於任意正實數 K，我們取

$$x=\sqrt{\frac{K}{B}}\sin\theta, y=-\sqrt{\frac{K}{B}}\cos\theta,$$

則由(21)式可知

$$ax^2+bxy+cy^2=B\cdot\frac{K}{B}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=K,$$

因此 $ax^2+bxy+cy^2$ 之值可為任意的正實數。

而(21)式中當 $B<0$ 時，我們有 $B<A=0$ 的條件，因此應取(19)式，且此時由(9)式可知 $a+c=B+A=B<0$。由於 $B<0$，因此由(21)式知 $ax^2+bxy+cy^2\leq 0$，其中取 $x=y=0$ 可得 $ax^2+bxy+cy^2=0$。而對於任意負實數 K，我們取

$$x=\sqrt{\frac{K}{B}}\sin\theta\,,y=-\sqrt{\frac{K}{B}}\cos\theta,$$

則由(21)式可知

$$ax^2+bxy+cy^2=B\cdot\frac{K}{B}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=K,$$

因此 $ax^2+bxy+cy^2$ 之值可為任意的負實數。

另一方面，若 $B=0,A\neq 0$，則由(4)式可知

$$ax^2+bxy+cy^2=A(\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y)^2. \tag{22}$$

依對稱性仿照上述的討論過程，同理可證明(22)式中當 $A>0$ 時，$ax^2+bxy+cy^2$ 之值可為零或為任意的正實數；當 $A<0$ ，時 $ax^2+bxy+cy^2$ 之值可為零或為任意的負實數。

最後，將上述的討論結果合起來看，可知本情況在 $b^2-4ac=0$ 的初始條件下 $ax^2+bxy+cy^2$ 的值域恰有兩種可能，當 $a+c>0$ 時，值域為「所有非負實數所成的集合」；當 $a+c<0$ 時，值域為「所有非正實數所成的集合」。

(b) 若 $b^2-4ac>0$，則 $ax^2+bxy+cy^2$ 的值域為 $(-\infty,\infty)$：

首先由(14)式知 $AB<0$，因此 A,B 兩數均不為 0 且兩者異號。此時(4)式中我們所關心的二次型為

$$ax^2+bxy+cy^2=A(\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y)^2+B(\sin\theta\cdot x-\cos\theta\cdot y)^2. \tag{23}$$

若 A 為正數，則 B 為負數，因此 $A>B$，故應取(15)式。首先在(23)式中取 $x=y=0$，可得 $ax^2+bxy+cy^2=0$。而對於任意正實數 K，取

$$x = \sqrt{\frac{K}{A}}\cos\theta, y = \sqrt{\frac{K}{A}}\sin\theta, \tag{24}$$

可得

$$ax^2 + bxy + cy^2 = A \cdot \frac{K}{A}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = K,$$

因此 $ax^2 + bxy + cy^2$ 之值可以是任意的正實數。而對於任意負數 K，取

$$x = \sqrt{\frac{K}{B}}\sin\theta, y = -\sqrt{\frac{K}{B}}\cos\theta, \tag{25}$$

可得

$$ax^2 + bxy + cy^2 = B \cdot \frac{K}{B}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = K,$$

因此 $ax^2 + bxy + cy^2$ 之值可以是任意的負實數。至此，我們知道本情況下$ax^2 + bxy + cy^2$ 的值域為所有實數。

此時回到(23)式，若 A 為負數，則 B 為正數，因此 $A < B$，故應取(16)式。而接下來只要仿照(24), (25)兩式的方式假設 x, y 兩數並代入(23)式，同理可知 $ax^2 + bxy + cy^2$ 的值域為所有實數。

(c) 若 $b^2 - 4ac < 0$，則 $ax^2 + bxy + cy^2$ 的值域為 $[0, \infty)$ 或 $(-\infty, 0]$

由(14)式知 $AB > 0$，因此 A, B 兩數均不為 0 且兩者同號。此時(4)式中我們所關心的二次型為

$$ax^2 + bxy + cy^2 = A(\cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y)^2 + B(\sin\theta \cdot x - \cos\theta \cdot y)^2. \tag{26}$$

若 A, B 均為正數，則由(9)式可知 $a + c = A + B > 0$，且由(26)式知 $ax^2 + bxy + cy^2 \geq 0$。在(26)式中取 $x = y = 0$，可得 $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$。而對於任意正數 K，我們取

$$x = \sqrt{\frac{K}{A}}\cos\theta, y = \sqrt{\frac{K}{A}}\sin\theta, \tag{27}$$

可得

$$ax^2 + bxy + cy^2 = A \cdot \frac{K}{A}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = K,$$

因此 $ax^2 + bxy + cy^2$ 之值可以是任意的正實數。

若 A, B 均為負數，則由(9)式可知 $a + c = A + B < 0$，且由(26)式知 $ax^2 + bxy + cy^2 \leq 0$。在(26)式中取 $x = y = 0$，可得 $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$。而對於任意負數 K，我們取

$$x = \sqrt{\frac{K}{B}}\sin\theta, y = -\sqrt{\frac{K}{B}}\cos\theta, \tag{28}$$

可得

$$ax^2 + bxy + cy^2 = B \cdot \frac{K}{B}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = K,$$

因此 $ax^2 + bxy + cy^2$ 之值可以是任意的負實數。

最後，將上述的討論結果合起來看，可知本情況在 $b^2 - 4ac < 0$ 的初始條件下 $ax^2 + bxy + cy^2$ 的值域恰有兩種可能：當 $a + c > 0$ 時，值域為「所有非負實數所成的集合」；當 $a + c < 0$ 時，值域為「所有非正實數所成的集合」。

至此，我們透過上述(a),(b),(c)的討論結果，得到以下的結論：

實係數二次型 $ax^2 + bxy + cy^2$ 值域的判別法則：

考慮實係數二次型 $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$，其中 a, b, c 為實數且不全為零，則有：

(1)　當 $b^2 - 4ac \leq 0$ 且 $a + c > 0$ 時， $f(x,y)$ 的值域為 $[0, \infty)$；

(2)　當 $b^2 - 4ac \leq 0$ 且 $a + c < 0$ 時， $f(x,y)$ 的值域為 $(-\infty, 0]$；

(3)　當 $b^2 - 4ac > 0$ 時， $f(x,y)$ 的值域為 $(-\infty, \infty)$，即全體實數所成的集合 R。

請讀者注意，雖然上面(a),(c)兩個項目的結論是相同的，但是要提醒(a),(c)兩項目在本質上有一處不同，其差別就在於(21), (22)兩式中的 $ax^2 + bxy + cy^2$ 均寫成一個完全平方式的常數倍，其中(21)式中的係數 B 與(22)式中係數 A 均不為零；而(26)式中的 $ax^2 + bxy + cy^2$ 則是寫成兩個完全平方式的線性組合，其中係數 A, B 均不為零。

而有了上述的判別法則後，對於任意形如 $ax^2 + bxy + cy^2$ 之實係數二次型我們就可以判斷其值域為何。

參、幾個實例的驗證與計算

在本節中，我們將會把上一節末的判別法則應用在一些實例上，且同時也會對各實例介紹「不使用判別法則」的處理方式。

首先，回到第一節的(3)式，該處我們所關心的二次型滿足

$$f(\beta,\alpha)=\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2.$$

使用上一節末的判別法則，取 $a=b=c=1$，因此判別式與 $a+c$ 之值滿足

$$b^2-4ac=-3<0,\qquad a+c=2>0.$$

由上兩式可確定二次型 $\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2$ 的值域為 $[0,\infty)$，即所有非負實數所成的集合，故再次確定

$$\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2\geq 0.$$

若我們改考慮不使用判別法則來證明上述結果，因為此處的 $\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2$ 是一般二次型 $a\beta^2+b\beta\alpha+c\alpha^2$ 取 $a=b=c=1$ 的結果，此時可透過(15)式或(16)式求出係數 A,B。不妨逕取(15)式並將 $a=b=c=1$ 代入，得到滿足 $A>B$ 的

$$(A,B)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$$

因為此時 $a-c=1-1=0$，回顧介於(16),(17)兩式之間的那段討論，我們知道 $a-c=0$ 時須取 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$。因為 $b=A-B=1$，此時 b 與 $A-B$ 同號，利用(11)式得 $\sin 2\theta>0$，所以應取 $\theta=\frac{\pi}{4}$。最後，將 $a=b=c=1$ 與所得之 $A=\frac{3}{2},B=\frac{1}{2},\theta=\frac{\pi}{4}$ 代入(4)式，並以 β,α 取代 x,y，即得

$$\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\beta+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\alpha\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\beta-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\alpha\right)^2\geq 0,$$

注意上式與第一節(3)式的結果完全相同。對上式來說，取 $\beta=\alpha=0$ 可得 $\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2=0$，而對於任意正實數 K，取

$$\beta=\sqrt{\frac{2K}{3}}\cos\frac{\pi}{4},\qquad \alpha=\sqrt{\frac{2K}{3}}\sin\frac{\pi}{4},$$

可得

$$\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2=\frac{3}{2}\cdot\frac{2K}{3}\left(\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{4}\right)=K,$$

因此 $\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2$ 之值可以是任意的正實數。至此我們就證明了 $\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2$ 的值域為所有非負實數所成的集合，且沒有使用上一節末的判別法則。

第二個例子，我們考慮二次型

$$f(x,y)=-x^2+2xy-3y^2.$$

使用上一節末的判別法則，取 $a=-1,b=2,c=-3$，則滿足

$$b^2-4ac=-8<0,\qquad a+c=-4<0,$$

由上兩式可確定二次型 $-x^2+2xy-3y^2$ 的值域為 $(-\infty,0]$，即所有非正實數所成的集合，因此知

$$-x^2+2xy-3y^2\le 0.$$

此外，若考慮不使用判別法則證明上述結果，可逕取(16)式並將 $a=-1,b=2,c=-3$ 代入，得到滿足 $A<B$ 的

$$(A,B)=\left(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right).$$

因為此時 $a-c=-1+3=2$，回顧(17)式所屬的那段討論，我們知道(4)式中所假設的 θ 值滿足

$$\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}=\frac{2}{2}=1,$$

因此 $2\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}$，故 $\theta=\frac{\pi}{8}$ 或 $\frac{5\pi}{8}$。θ 該選擇哪個角度呢？注意此時

$$b=2>0,\qquad A-B=-2\sqrt{2}<0,$$

故由(11)式知 $\sin 2\theta<0$，因此 $\pi<2\theta<2\pi$，故 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，應選擇 $\theta=\frac{5\pi}{8}$。此時將 $a=-1,b=2,c=-3$ 與 A,B,θ 之值代入(4)式，即得

$$-x^2+2xy-3y^2=\left(-2-\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{8}\cdot x+\sin\frac{5\pi}{8}\cdot y\right)^2+\left(-2+\sqrt{2}\right)\left(\sin\frac{5\pi}{8}\cdot x-\cos\frac{5\pi}{8}\cdot y\right)^2\le 0.$$

注意 $-2-\sqrt{2}<0$，對上式來說，取 $x=y=0$ 可得 $-x^2+2xy-3y^2=0$，而對於任意負實數 K，我們取

$$x=\sqrt{\frac{K}{-2-\sqrt{2}}}\cos\frac{5\pi}{8},\qquad y=\sqrt{\frac{K}{-2-\sqrt{2}}}\sin\frac{5\pi}{8},$$

可得

$$-x^2+2xy-3y^2=\left(-2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\frac{K}{-2-\sqrt{2}}\right)\left(\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}\right)=K,$$

因此 $-x^2+2xy-3y^2$ 之值可以是任意的負實數。至此我們就證明了 $-x^2+2xy-3y^2$ 的值域為所有非正實數所成集合，且沒有使用上一節末的判別法則。

第三個例子，我們考慮二次型

$$f(x,y)=x^2-\sqrt{3}xy.$$

使用上一節末的判別法則，取 $a=1,b=-\sqrt{3},c=0$，則判別式滿足

$$b^2-4ac=3>0,$$

因此可確定二次型 $x^2-\sqrt{3}xy$ 的值域為 R，即所有實數所成的集合。

若考慮不使用判別法則證明上述結果，我們也可逕取(15)式並將 $a=1,b=-\sqrt{3},c=0$ 代入，得到滿足 $A>B$ 的

$$(A,B)=\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right).$$

此時 $a-c=1$，回顧(17)式所屬的那段討論，可知(4)式中的 θ 值滿足

$$\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}=-\sqrt{3},$$

因此 $2\theta=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$，故 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$。此時 θ 該選擇哪個角度呢？注意此時

$$b=-\sqrt{3}<0,\qquad A-B=2>0,$$

故由(11)式知 $\sin 2\theta<0$，因此 $\pi<2\theta<2\pi$，故 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，應選擇 $\theta=\frac{5\pi}{6}$。此時將 $a=1,b=-\sqrt{3},c=0$ 與 A,B,θ 之值代入(4)式，即得

$$x^2-\sqrt{3}xy=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\cdot x+\sin\frac{5\pi}{6}\cdot y\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\cdot x-\cos\frac{5\pi}{6}\cdot y\right)^2.$$

對上式來說，取 $x=y=0$ 可得 $x^2-\sqrt{3}xy=0$，而對於任意正實數 K，取

$$x=\sqrt{\frac{2K}{3}}\cos\frac{5\pi}{6},y=\sqrt{\frac{2K}{3}}\sin\frac{5\pi}{6},$$

可得

$$x^2-\sqrt{3}xy=\frac{3}{2}\cdot\frac{2K}{3}\left(\cos^2\frac{5\pi}{6}+\sin^2\frac{5\pi}{6}\right)=K,$$

因此 $x^2-\sqrt{3}xy$ 之值可以是任意的正實數。而對於任意負實數 K，取

$$x=\sqrt{-2K}\sin\frac{5\pi}{6},y=-\sqrt{-2K}\cos\frac{5\pi}{6},$$

可得

$$x^2-\sqrt{3}xy=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2K)\left(\sin^2\frac{5\pi}{6}+\cos^2\frac{5\pi}{6}\right)=K,$$

因此 $x^2-\sqrt{3}xy$ 之值可以是任意的負實數。因此，我們知道 $x^2-\sqrt{3}xy$ 之值可以是任意實數。至此我們就證明了 $x^2-\sqrt{3}xy$ 的值域為所有實數所成集合，且沒有使用上一節末的判別法則。

以上內容就是本節所要介紹的三個實例，讀者若有興趣亦可自行找一些其他的實例來進行驗證，且可參考本節所介紹的方式進行討論。

肆、結語

在寫作本文之前，筆者已先在[2]文中介紹過一個與本文第二節末之判別法則類似的一個法則，且同樣是利用判別式 b^2-4ac 之值來判定實係數二次型 $ax^2+bxy+cy^2$ 的值域。不過，就如同[2]文最後所說，筆者認為應該有更好的方法可求得相同的結果。後來，由於注意到一些二次型的實例可透過類似(3)式的方式作改寫並藉此判斷出二次型的取值範圍，因此使筆者想到可利用(4)式的假設來改寫 $ax^2+bxy+cy^2$ 並順利完成後續的推論，最終才得到本文第二節末比[2]文更進一步的判別法則。

值得一提的是，早在本文開始撰寫之前，筆者已在一張紙上記下了本文第二節內容的重點，等待日後有空再拿出那張紙並開始寫作。但就在寫完本文第一節的內容後，筆者才發現找不到那張紙了。不過雖然如此，當筆者硬著頭皮開始寫作後，發現還是能慢慢拼湊出當初的想法，而且還對當初沒有注意到的細節進行討論，這或許就說明了「好事多磨」與「凡走過必留下痕跡」的道理。

如此看來，其實寫作就是一趟追尋自我的過程，也可說是與自己的一場對話。本文最後，建議讀者在研究科學之餘不妨多試著將自己的心得寫下並投稿科教育月刊，和自己來一場最真誠的對話，同時也把心中的想法記錄下來。

參考文獻

1. 張海潮。三次多項式圖形的基本探討。數學傳播季刊, 32(1), 54-59, 2008。
2. 連威翔。實係數二次型 $ax^2+bxy+cy^2$ 的值域判別。科學教育月刊，第 428 期, 40-46, 2020。