以函數形式描述前 N 個連續正整數等冪次和的多項式係數(上)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前 言

前 N 個連續正整數等冪次和的多項式函數為 $\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n)$，它是 n 的 $m+1$ 次多項式，可表示成 $\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n) = \sum_{i=1}^{m+1} a_{m+2-i} n^{m+2-i}$ 型式，式中有 $m+1$ 個待定係數 a_{m+2-i}，找出這所有的待定係數值即可知悉 $\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n)$ 的真確函數型式。

主題首先對 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 多項式作均差運算表並配合待定係數法求出 $m=8$ 範例的 $\sum_{k=1}^{n} k^8$ 公式，再列出仿效它計算的前 16 型公式，即 $m=1$ ～ $m=16$ 的各型公式。其次，將這 16 型公式的各自內容中針對每一型公式都選取其各相同位置項係數 a_{m+2-i} (如；都選取出第 5 位置項係數 a_{m-3}，$m \geq 4$)，再按 m 的順序集結、對應起來形成序列數據點 $\{(m, a_{m+2-i})\}$，如；所有含有第 5 位置項係數形成的序列數據點 $\{(m, a_{m-3})\}$，最後就每一組序列數據點尋找出各對應位置項係數數據值 a_{m+2-i} 與 m 間的相關聯函數關係。如此，即能獲得以函數形式來描述前 N 個連續正整數等冪次和的多項式係數表示式。再以應用這些已被確認的係數值函數透過逐步遞推運算來求取下一個 $m+1$ 值的 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 多項式公式及係數函數。

考量求出這些係數需要同時應用到均差運算與待定係數法：

均差(Divided differences)運算是指一個函數中其(兩個函數值的差)與其(對應輸入元素的差)的比值，是函數在某一區間內的平均變化率的測度。對此前 N 個連續正整數等冪次和的多項式函數作逐階均差運算，其每一階的均差運算值都必關連到此函數的相關係數。選取適當的均差運算值即可搭配待定係數法求解。

應用待定係數法(Method of undetermined coefficients)求解係數的流程是：

(i). 選定所求問題的待定係數，尋找符合所需條件而含有待定係數的恆等式。

(ii). 依據恆等式建立含有相關待定係數的方程式組。

(iii). 解出方程式組以求得各待定係數值。

貳、本 文

一、 預備知識

[引理 1.]： $\sum_{k=1}^{n} k^{m} = f(n) = \sum_{i=1}^{m+1} a_{m+2-i} n^{m+2-i}$ 為 n 的 $m+1$ 次多項式，此 $m+1$ 次數項的係數為 $\frac{1}{m+1}$ 且 此多項式的常數項為 0， m,n 為正整數或等於 0。

[證明]：直覺應用著名的經典完善理論；數學歸納法的形成與原理來證明。

當 $m=1$ 時， $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n^{2} + \frac{1}{2}n$ 為 n 的 2 次多項式，2 次數項的係數為 $\frac{1}{2}$ 且 此多項式常數項為 0。敘述成立。

假設當 $m \le u$ 時，$\sum_{k=1}^{n} k^{u}$ 是關於 n 的 $u+1$ 次多項式等等敘述皆成立，則

當 $m = u+1$ 時，u 為正整數， $n^{u+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{u+2} - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^{u+2}$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^{u+2} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=0}^{u+2} (-1)^{r} C_{r}^{u+2} k^{u+2-r}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\ k^{u+2} - \sum_{r=0}^{u+2} (-1)^{r} C_{r}^{u+2} k^{u+2-r}\ \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{u+2} (-1)^{r+1} C_{r}^{u+2} k^{u+2-r}$$

$$= \sum_{r=1}^{u+2} (-1)^{r+1} C_{r}^{u+2} \sum_{k=1}^{n} k^{u+2-r}$$

$$= (u+2) \sum_{k=1}^{n} k^{u+1} - \sum_{r=2}^{u+2} (-1)^{r} C_{r}^{u+2} \sum_{k=1}^{n} k^{u+2-r}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^{u+1} = \frac{1}{u+2}\left[\ n^{u+2} + \sum_{r=2}^{u+2} (-1)^{r} C_{r}^{u+2} \sum_{k=1}^{n} k^{u+2-r}\ \right] \qquad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{u+1} = \frac{1}{u+2}\left[\ n^{u+2} + \sum_{r=2}^{u+1}(-1)^r C_r^{u+2} \sum_{k=1}^{n} k^{u+2-r}\ \right] + \frac{1}{u+2}\cdot(-1)^{u+2}\cdot\sum_{k=1}^{n} 1 \qquad (1)$$

由(1)式得知 $\sum_{k=1}^{n} k^{u+1}$ 是 n 的 $u+2$ 次多項式，$u+2$ 次數項的係數為 $\frac{1}{u+2}$， 且因 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} k^{u+1}=\sum_{k=0}^{n} k^{u+1}$，當 $n=0$ ，$f(0)=0$，則此多項式常數項為 0，敘述亦成立。

自 $m=1, 2, 3, \cdots$ 至 $m=u$ ，再到 $m=u+1$ ，敘述都成立。

由數學歸納法知；對所有正整數 m 與 n 而言，$\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n) = \sum_{i=1}^{m+1} a_{m+2-i} n^{m+2-i}$ 為 n 的 $m+1$ 次多項式，此 $m+1$ 次數項的係數 a_{m+1} 為 $\frac{1}{m+1}$ 且此多項式的常數項為 0，嚴謹又完備的證明出原命題敘述必然成立。

[引理 2.]： 等間距的牛頓插值公式 (連續整數等間距為 1)

坐標平面上有 $n+1$ 個已知數據點；(t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), $\cdots$, (t_u, y_u), $\cdots$, (t_n, y_n)，其中 $t_u = t_0 + u$ ，$u = 0,1, 2, 3,\cdots, n$ ，則存在唯一的 n 次多項函數 $y=f(x)$，通過這 $n+1$ 個已知數據點，此多項函數為

$$y = f(x) = f(t_0) + \sum_{u=1}^{n} \frac{\Delta^u f(t_0)}{u\ !}(x-t_0)(x-t_0-1)(x-t_0-2)\cdots(x-t_0-u+1) \qquad (2)$$

[證明]：略。請參閱文獻 [1] 。

此(2)式就是連續整數等間距變數的牛頓插值公式。

應用預備知識的這 2 則理論，可以非常有效地來幫助下述主文的推理演繹！

二、 主題推演

[A]. 現在選取函數式 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{k=0}^{n} k^m$ 並編製其橫式均差運算表，如下；

n ： $0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots \quad m \quad m+1 \quad m+2$

f ： $0 \quad 1 \quad 1+2^m \quad \sum_{k=0}^{3} k^m \quad \sum_{k=0}^{4} k^m \quad \cdots \quad \sum_{k=0}^{m} k^m \quad \sum_{k=0}^{m+1} k^m \quad \sum_{k=0}^{m+2} k^m$

1 階： $1 \quad 2^m \quad 3^m \quad 4^m \quad 5^m \cdots \quad m^m \quad (m+1)^m \quad (m+2)^m$

2 階： $\frac{2^m-1}{2} \quad \frac{3^m-2^m}{2} \quad \frac{4^m-3^m}{2} \quad \cdots \quad \frac{(m+1)^m-m^m}{2} \quad \frac{(m+2)^m-(m+1)^m}{2}$

3 階： $\frac{3^m-2\cdot 2^m+1}{6} \quad \frac{4^m-2\cdot 3^m+2^m}{6} \quad \cdots \quad \frac{(m+2)^m-2(m+1)^m+m^m}{6}$

4 階：　$\dfrac{4^m-3\cdot 3^m+3\cdot 2^m-1}{24}$　$\cdots$　$\dfrac{(m+2)^m-3(m+1)^m+3m^m-(m-1)^m}{24}$

5 階：　$\dfrac{5^m-4\cdot 4^m+6\cdot 3^m-4\cdot 2^m+1}{120}$　$\dfrac{6^m-4\cdot 5^m+6\cdot 4^m-4\cdot 3^m+2^m}{120}$

$\cdots$　$\dfrac{(m+2)^m-4(m+1)^m+6m^m-4(m-1)^m+(m-2)^m}{120}$

6 階：　$\dfrac{6^m-5\cdot 5^m+10\cdot 4^m-10\cdot 3^m+5\cdot 2^m-1}{6\ !}$　$\cdots$

7 階：　$\dfrac{7^m-6\cdot 6^m+15\cdot 5^m-20\cdot 4^m+15\cdot 3^m-6\cdot 2^m+1}{7\ !}$　$\cdots$

8 階：　$\dfrac{8^m-7\cdot 7^m+21\cdot 6^m-35\cdot 5^m+35\cdot 4^m-21\cdot 3^m+7\cdot 2^m-1}{8\ !}$　$\cdots$

$\vdots$　　$\vdots$　　$\vdots$

m 階：　$\dfrac{\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r C_r^{m-1}(m-r)^m}{m\ !}$　$\dfrac{\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r C_r^{m-1}(m+1-r)^m}{m\ !}$

$\dfrac{\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r C_r^{m-1}(m+2-r)^m}{m\ !}$

$m+1$ 階：　$\dfrac{\sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^{m}(m+1-r)^m}{(m+1)\ !}$　$\dfrac{\sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^{m}(m+2-r)^m}{(m+1)\ !}$

以上完成了所需求數據值自 0 階、1 階到 $m+1$ 階的全套橫式均差運算列表。上述就是經歷推演整理而編製出函數式 $f(n)=\sum_{k=0}^{n}k^m$ 的均差運算表。因 $f(n)$ 是 n 的 $m+1$ 次多項式，當計算到第 $m+1$ 階均差運算列，此列的所有數值都會是相等的固定常數值，此常數值就是 $m+1$ 次數項的係數值 a_{m+1}。所以均差表最末一列的常數值可寫為 $\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\cdot C_r^m\cdot(m+1-r)^m = a_{m+1}\cdot(m+1)!$，而又因為 $\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\cdot C_r^m\cdot(m+1-r)^m = m\ !$，可得下列等式 $a_{m+1}\cdot(m+1)!=m\ !$。因此，第 $m+1$ 次數項的係數值 a_{m+1} 恰為 $1/(m+1)$。

此橫式均差運算列表中，各階運算列的第 1 個數值皆是 $\dfrac{\Delta^u}{u\ !}f(0)$，$u=1,2,3,\cdots,m,m+1$，如：$\Delta f(0)=1$，$\dfrac{\Delta^2}{2\ !}f(0)=\dfrac{2^m-1}{2}$，$\dfrac{\Delta^3}{3\ !}f(0)=\dfrac{3^m-2\cdot 2^m+1}{6}$，…，$\dfrac{\Delta^8}{8\ !}f(0)=$

$\dfrac{8^m-7\cdot 7^m+21\cdot 6^m-35\cdot 5^m+35\cdot 4^m-21\cdot 3^m+7\cdot 2^m-1}{8\ !}$，⋯。所以，得 $\Delta f(0)=1$，$\Delta^2 f(0)$ $=2^m-1$， $\Delta^3 f(0)=3^m-2\cdot 2^m+1$， $\Delta^4 f(0)=4^m-3\cdot 3^m+3\cdot 2^m-1$， ⋯， $\Delta^8 f(0)=$ $8^m-7\cdot 7^m+21\cdot 6^m-35\cdot 5^m+35\cdot 4^m-21\cdot 3^m+7\cdot 2^m-1$，⋯，依此類推，任一階之差分運算列的第 1 數都可被表述計算出來。

[B]. 示範演算：當等冪次 $m=8$ (偶數) 時的待定係數法推演多項式流程

應用預備知識的[引理 1.]特性可直接寫出 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的待定係數表示式。

取等冪次 $m=8$ 時，假設待定係數為 a_{10-i}，$i=1, 2, 3,\cdots, 9$，且 $a_9=1/9$，則

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n} k^8=\frac{1}{9}n^9+a_8n^8+a_7n^7+a_6n^6+a_5n^5+a_4n^4+a_3n^3+a_2n^2+a_1n \qquad (3)$$

這函數(3)式合計有 8 個待定係數，要設法解出這 8 個待定係數值以找到其公式。

(B1). 尋找出符合所需條件而含有待定係數的恆等式。

(B1.1). 定義 一階(右)差分運算 $\Delta f(t_0)=f(t_1)-f(t_0)=f(t_0+1)-f(t_0)$，而 $\Delta^u f(t_0)$ 表示第 u 階差分。因此，函數(3)式的差分運算為 $\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$，由此差分運算法則可以尋找到符合所需條件而含有待定係數的恆等式。

對函數(3)式言，將(3)式代入一階(右)差分運算式 $\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$ 中，得

$$\Delta f(n)=\Big[\ \frac{1}{9}(n+1)^9+a_8(n+1)^8+a_7(n+1)^7+a_6(n+1)^6+a_5(n+1)^5+a_4(n+1)^4+a_3(n+1)^3$$

$$+a_2(n+1)^2+a_1(n+1)\ \Big]-\Big(\ \frac{1}{9}n^9+a_8n^8+a_7n^7+a_6n^6+a_5n^5+a_4n^4+a_3n^3+a_2n^2+a_1n\ \Big)$$

$$=\frac{1}{9}(9n^8+36n^7+84n^6+126n^5+126n^4+84n^3+36n^2+9n+1)+a_8(8n^7+28n^6$$
$$+56n^5+70n^4+56n^3+28n^2+8n+1)+a_7(7n^6+21n^5+35n^4+35n^3+21n^2+7n+1)$$
$$+a_6(6n^5+15n^4+20n^3+15n^2+6n+1)+a_5(5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)$$
$$+a_4(4n^3+6n^2+4n+1)+a_3(3n^2+3n+1)+a_2(2n+1)+a_1$$

$$=n^8+(4+8a_8)n^7+(\frac{28}{3}+28a_8+7a_7)n^6+(14+56a_8+21a_7+6a_6)n^5+(14+70a_8+35a_7+15$$
$$a_6+5a_5)n^4+(\frac{28}{3}+56a_8+35a_7+20a_6+10a_5+4a_4)n^3+(4+28a_8+21a_7+15a_6$$
$$+10a_5+6a_4+3a_3)n^2+(1+8a_8+7a_7+6a_6+5a_5+4a_4+3a_3+2a_2)n\ +(\frac{1}{9}+a_8+a_7+a_6$$

$+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1)$ $\Rightarrow$

$$\Delta f(0)=1=\frac{1}{9}+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1 \quad \textbf{(3.1)}$$

這(3.1)式就是與待定係數相關聯的第 1 個 1 次方程式。$\Delta f(0)=1$ 就是[A].節均差運算表中第 1 階運算列的第 1 個數值。

(B1.2). 作第 2 階差分運算 $\Rightarrow$

$$\Delta^2 f(n)=(8n^7+28n^6+56n^5+70n^4+56n^3+28n^2+8n+1)+(4+8a_8)(7n^6+21n^5+35n^4+35n^3+21n^2+7n+1)+(\frac{28}{3}+28a_8+7a_7)(6n^5+15n^4+20n^3+15n^2+6n+1)+(14+56a_8+21a_7+6a_6)(5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)+(14+70a_8+35a_7+15a_6+5a_5)(4n^3+6n^2+4n+1)+(\frac{28}{3}+56a_8+35a_7+20a_6+10a_5+4a_4)(3n^2+3n+1)+(4+28a_8+21a_7+15a_6+10a_5+6a_4+3a_3)(2n+1)+(1+8a_8+7a_7+6a_6+5a_5+4a_4+3a_3+2a_2)$$

$$=8n^7+(56+56a_8)n^6+(196+336a_8+42a_7)n^5+(420+980a_8+210a_7+30a_6)n^4+[578+(2/3)+1680a_8+490a_7+120a_6+20a_5]n^3+(504+1736a_8+630a_7+210a_6+60a_5+12a_4)n^2+(254+1008a_8+434a_7+180a_6+70a_5+24a_4+6a_3)n+[56+(2/3)+254a_8+126a_7+62a_6+30a_5+14a_4+6a_3+2a_2]$$ $\Rightarrow$

$$\Delta^2 f(0)=2^8-1=255=(170/3)+254a_8+126a_7+62a_6+30a_5+14a_4+6a_3+2a_2 \quad \textbf{(3.2)}$$

$\Delta^2 f(0)=2^8-1=255$ 就是[A].節均差運算表中第 2 階運算列的第 1 個分式的分子數值。這(3.2)式就是與待定係數相關聯的第 2 個 1 次方程式。

(B1.3). 作第 3 階差分運算 $\Rightarrow$

$$\Delta^3 f(n)=8(7n^6+21n^5+35n^4+35n^3+21n^2+7n+1)+(56+56a_8)(6n^5+15n^4+20n^3+15n^2+6n+1)+(196+336a_8+42a_7)(5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)+(420+980a_8+210a_7+30a_6)(4n^3+6n^2+4n+1)+[578+(2/3)+1680a_8+490a_7+120a_6+20a_5](3n^2+3n+1)+(504+1736a_8+630a_7+210a_6+60a_5+12a_4)(2n+1)+(254+1008a_8+434a_7+180a_6+70a_5+24a_4+6a_3)$$

$$=56n^6+(504+336a_8)n^5+(2100+2520a_8+210a_7)n^4+(5040+8400a_8+1260a_7+120a_6)n^3+(7224+15120a_8+3150a_7+540a_6+60a_5)n^2+(5796+14448a_8+3780a_7+900a_6+180a_5+24a_4)n+[(6050/3)+5796a_8+1806a_7+540a_6+150a_5+36a_4+6a_3]$$

$\Rightarrow$

$$\Delta^3 f(0)=3^8-2\cdot 2^8+1=6050=(6050/3)+5796a_8+1806a_7+540a_6+150a_5+36a_4+6a_3$$

$$\Rightarrow \quad (6050/3)+5796a_8+1806a_7+540a_6+150a_5+36a_4+6a_3=6050 \quad \textbf{(3.3)}$$

$\Delta^3 f(0) = 3^8 - 2\cdot 2^8 + 1 = 6050$ 就是[A].節列表中第 3 階運算列的第 1 個分式的分子數值。

這(3.3)式就是與待定係數相關聯的第 3 個 1 次方程式。

(B1.4). 作第 4 階差分運算 (省略相同的計算過程) $\Rightarrow$

$\Delta^4 f(n) = 336\,n^5 + (3360+1680\,a_8)\,n^4 + (14560+13440\,a_8+840\,a_7)\,n^3 + (33600+43680\,a_8+5040\,a_7+360\,a_6)\,n^2 + (40824+67200\,a_8+10920\,a_7+1440\,a_6+120\,a_5)\,n$

$+\ (20720+40824\,a_8+8400\,a_7+1560\,a_6+240\,a_5+24\,a_4)$ $\Rightarrow$

$\Delta^4 f(0) = 4^8 - 3\cdot 3^8 + 3\cdot 2^8 - 1 = 65536 - 19683 + 786 - 1 = 46620$ $\Rightarrow$

$$\Delta^4 f(0) = 20720+40824\,a_8+8400\,a_7+1560\,a_6+240\,a_5+24\,a_4 = 46620 \qquad \textbf{(3.4)}$$

這(3.4)式就是與待定係數相關聯的第 4 個 1 次方程式。

(B1.5). 作第 5 階差分運算 (省略相同的計算過程) $\Rightarrow$

$\Delta^5 f(n) = 1680\,n^4 + (16800+6720\,a_8)\,n^3 + (67200+50400\,a_8+2520\,a_7)\,n^2 + (126000 + 134400\,a_8+12600\,a_7+720\,a_6)\,n + (92680+126000\,a_8+16800\,a_7+1800\,a_6+120\,a_5)$ $\Rightarrow$

$\Delta^5 f(0) = 92680+126000\,a_8+16800\,a_7+1800\,a_6+120\,a_5$ 且

$\Delta^5 f(0) = 5^8 - 4\cdot 4^8 + 6\cdot 3^8 - 4\cdot 2^8 + 1 = 390625 - 262144 + 39366 - 1024 + 1 = 166824$

$$\Rightarrow \quad 92680+126000\,a_8+16800\,a_7+1800\,a_6+120\,a_5 = 166824 \qquad \textbf{(3.5)}$$

這(3.5)式就是與待定係數相關聯的第 5 個 1 次方程式。

(B1.6). 作第 6 階差分運算 (省略相同的計算過程) $\Rightarrow$

$\Delta^6 f(n) = 6720\,n^3 + (60480+20160\,a_8)\,n^2 + (191520+120960\,a_8+5040\,a_7)\,n + (211680 + 191520\,a_8+15120\,a_7+720\,a_6)$ $\Rightarrow$

$\Delta^6 f(0) = 211680 + 191520\,a_8+15120\,a_7+720\,a_6$ 且

$\Delta^6 f(0) = 6^8 - 5\cdot 5^8 + 10\cdot 4^8 - 10\cdot 3^8 + 5\cdot 2^8 - 1$

$= 1679616 - 1953125 + 655360 - 65610 + 1280 - 1 = 317520$

$$\Rightarrow \quad 211680 + 191520\,a_8+15120\,a_7+720\,a_6 = 317520 \qquad \textbf{(3.6)}$$

這(3.6)式就是與待定係數相關聯的第 6 個 1 次方程式。

(B1.7). 作第 7 階差分運算 (省略相同的計算過程) $\Rightarrow$

$\Delta^7 f(n) = 20160\,n^2 + (141120+40320\,a_8)\,n + (258720+141120\,a_8+5040\,a_7)$ $\Rightarrow$

$\Delta^7 f(0) = 258720+141120\,a_8+5040\,a_7$ 且

$\Delta^7 f(0) = 7^8 - 6\cdot 6^8 + 15\cdot 5^8 - 20\cdot 4^8 + 15\cdot 3^8 - 6\cdot 2^8 + 1$

$= 5764801 - 10077696 + 5859375 - 1310720 + 98415 - 1536 + 1 = 332640$

$$\Rightarrow \quad \Delta^7 f(0) = 258720+141120\,a_8+5040\,a_7 = 332640 \qquad \textbf{(3.7)}$$

這(3.7)式就是與待定係數相關聯的第 7 個 1 次方程式。

(B1.8). 作第 8 階差分運算 (省略相同的計算過程) $\Rightarrow$

$\Delta^8 f(n) = 40320\,n + (161280+40320\,a_8) \quad \Rightarrow \quad \Delta^8 f(0) = 161280+40320\,a_8$　且

$\Delta^8 f(0) = 8^8 - 7\cdot 7^8 + 21\cdot 6^8 - 35\cdot 5^8 + 35\cdot 4^8 - 21\cdot 3^8 + 7\cdot 2^8 - 1$

$= 16777216 - 40353607 + 35271936 - 13671875 + 2293760 - 137781 + 1792 - 1 = 181440$

$$\Rightarrow \quad \Delta^8 f(0) = 161280+40320\,a_8 = 181440 \tag{3.8}$$

這(3.8)式就是與待定係數相關聯的第 8 個 1 次方程式。

以上合計，找到了所有與待定係數相關聯的 8 個恆等式，解這 8 個恆等式所形成的聯立方程組，即可求出(3)式的 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} k^8$ 的正確完整多項函數表示式。

(B2). 求出(3)式 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} k^8$ 的正確完整多項函數表示式，解聯立方程式組

首先，因這(3.8)式只有一個未知係數 a_8，解出(3.8)式，得 $a_8 = 1/2$ 。
接著，將 $a_8 = 1/2$ 代入(3.7)式，解出(3.7)式，得 $a_7 = 2/3$ 。
續將 a_8, a_7 值代入(3.6)式，解出(3.6)式，得 $a_6 = 0$ 。
續將 a_8, a_7, a_6 值代入(3.5)式，解出(3.5)式，得 $a_5 = -7/15$ 。
續將 a_8, a_7, a_6, a_5 值代入(3.4)式，解出(3.4)式，得 $a_4 = 0$ 。
續將 a_8, a_7, a_6, a_5, a_4 值代入(3.3)式，解出(3.3)式，得 $a_3 = 2/9$ 。
續將 $a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3$ 值代入(3.2)式，解出(3.2)式，得 $a_2 = 0$ 。
續將 $a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2$ 值代入(3.1)式，解出(3.1)式，得 $a_1 = -1/30$ 。
再將以上計算出的所有係數值代入(3)式中，得到完整的多項函數式於下；

$$\sum_{k=1}^{n} k^8 = f(n) = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \tag{3.9}$$

上述(3.9)式就是應用待定係數法求出正確完整多項函數式的全部演算流程！

(B3). 仿效上述 (B1).與(B2).節的推演流程，所演算出來的冪次方和，自 1 次方和、2 次方和、3 次方和、4 次方和、⋯、16 次方和等各正確完整多項函數式整理如下；

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad , \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{4}[n(n+1)]^2 \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = n(n+1)\cdot\frac{6n^3+9n^2+n-1}{30} \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \frac{1}{12}n^2(n+1)(2n^3+4n^2+n-1) \quad ,$$

$\sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$,

$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$,

$\sum_{k=1}^{n} k^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$,

$\sum_{k=1}^{n} k^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$,

$\sum_{k=1}^{n} k^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$,

$\sum_{k=1}^{n} k^{11} = \frac{1}{12}n^{12} + \frac{1}{2}n^{11} + \frac{11}{12}n^{10} - \frac{11}{8}n^8 + \frac{11}{6}n^6 - \frac{11}{8}n^4 + \frac{5}{12}n^2$,

$\sum_{k=1}^{n} k^{12} = \frac{1}{13}n^{13} + \frac{1}{2}n^{12} + n^{11} - \frac{11}{6}n^9 + \frac{22}{7}n^7 - \frac{33}{10}n^5 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{691}{2730}n$,

$\sum_{k=1}^{n} k^{13} = \frac{1}{14}n^{14} + \frac{1}{2}n^{13} + \frac{13}{12}n^{12} - \frac{143}{60}n^{10} + \frac{143}{28}n^8 - \frac{143}{20}n^6 + \frac{65}{12}n^4 - \frac{691}{420}n^2$

$\sum_{k=1}^{n} k^{14} = \frac{1}{15}n^{15} + \frac{1}{2}n^{14} + \frac{7}{6}n^{13} - \frac{91}{30}n^{11} + \frac{143}{18}n^9 - \frac{143}{10}n^7 + \frac{91}{6}n^5 - \frac{691}{90}n^3 + \frac{7}{6}n$

$\sum_{k=1}^{n} k^{15} = \frac{1}{16}n^{16} + \frac{1}{2}n^{15} + \frac{5}{4}n^{14} - \frac{91}{24}n^{12} + \frac{143}{12}n^{10} - \frac{429}{16}n^8 + \frac{455}{12}n^6 - \frac{691}{24}n^4 + \frac{35}{4}n^2$

$\sum_{k=1}^{n} k^{16} = \frac{1}{17}n^{17} + \frac{1}{2}n^{16} + \frac{4}{3}n^{15} - \frac{14}{3}n^{13} + \frac{52}{3}n^{11} - \frac{143}{3}n^9 + \frac{260}{3}n^7 - \frac{1382}{15}n^5 + \frac{140}{3}n^3$

$- \frac{3617}{510}n$

[C]. $\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n)$ 一般化公式的逐步推演法則

試想將上述的前 16 式推廣一般化，推演出 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 通用公式的逐步演算法則；

(C1). 由[引理 1.]知悉 $\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n)$ 其多項函數展開式的第 1 項係數是 a_{m+1} ，而

$a_{m+1} = 1/(m+1)$ (4.1)

再由觀察上述的前 16 式，可確知第 2 項係數 $a_m = 1/2$ (4.2)

(C2). 接著對前 16 個 $f(n)$ 公式依序個別選取其第 3 項係數 a_{m-1}。將相對應的 m 與 a_{m-1} 寫成數據點（m, a_{m-1}），得到下列；(2, 1/6), (3, 1/4), (4, 1/3), (5, 5/12), (6, 1/2), (7, 7/12), (8, 2/3), (9,3/4), (10,5/6), (11,11/12), (12,1), (13,13/12), ⋯ 。容易找出 a_{m-1} 與 m 的關係； 因觀察到任意兩點的平均變化率(斜率)都是 1/12 ，所以它們都是坐標平面上同一直線上的各相異點，由直線式 $a_{m-1} = (1/12)\cdot m + \mathrm{b}$，代入上述任一數據點計算，得 b = 0，因而得到

$$a_{m-1} = (m/12) = \frac{P_1^m}{2!}\cdot\frac{1}{6} \tag{4.3}$$

這係數 a_{m-1} 寫成 $\frac{P_1^m}{2!}\cdot\frac{1}{6}$ 表示式顯示的意義是：(i) $a_{m-1} = (m/12)$的函數形式乃由數據點(m, a_{m-1})彙整計算而得，這些數據點（m, a_{m-1})是由初始數據點 (2, 1/6)所率領，這 (2, 1/6)的數據值是由 $m = 2$ 的 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ 中取到的，即最早出現的第 3 項係數值是 $m = 2$ 公式中的 1/6。 (ii)要將 $a_{m-1} = (m/12)$變形寫成與 2 和 1/6 相關聯的函數，得 $a_{m-1} = \frac{m}{2!}\cdot\frac{1}{6}$，而 m 恰可寫成排列數的 P_1^m，從而得到 $a_{m-1} = \frac{P_1^m}{2!}\cdot\frac{1}{6}$。這樣就形塑出在所有 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 公式中來產生各個公式裡第 3 項位置係數值 a_{m-1} 的生成函數式 $a_{m-1} = \frac{P_1^m}{2!}\cdot\frac{1}{6}$ 。且又有

$$a_{m-1} = \frac{P_1^m}{2!}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{4}\cdot\frac{P_1^m}{P_1^3} \tag{4.3}$$

(C3). 持續觀察到第 4 項係數 $a_{m-2} = 0$ (4.4)

(C4). 再繼續比對第 5 項係數 a_{m-3} 的 $-a_{m-3}$。 得到下列數據點（$m, -a_{m-1}$)；有 (4, 1/30), (5, 1/12), (6, 1/6), (7, 7/24), (8, 7/15), (9,7/10), (10,1), (11,11/8), ⋯ 。

以下要編製出上述數據點的橫式均差運算表以求出 $-a_{m-3}$ 與 m 的函數關係；

m	4	5	6	7	8	9	10	11
$-a_{m-3}$	1/30	1/12	1/6	7/24	7/15	7/10	1	11/8
1 階	1/20	1/12	1/8	7/40	7/30	3/10	3/8	
2 階	1/60	1/48	1/40	7/240	1/30	3/80		
3 階	1/720	1/720	1/720	1/720				

此運算表中見到第 3 階運算列得到一個常數值 1/720，就無需再運算到下一階。直接應用[引理 2.]牛頓插值公式法，則由上表在 $m = 4$ 時的 4 個數值 1/30，1/20，1/60 及 1/720，可得到下述關係式；

$$-a_{m-3} = (1/30)+(1/20)(m-4)+(1/60)(m-4)(m-5)+(1/720)(m-4)(m-5)(m-6)$$

$= (m^3 - 3m^2 + 2m)/720$

所以，尋找到 $-a_{m-3}$ 與 m 的函數關係為；

$-a_{m-3} = (m^3 - 3m^2 + 2m)/720 = m(m-1)(m-2)/720 = P_3^m / (6\ !) = P_3^m / (30 \cdot 4!)$

從而得到係數 $a_{m-3} = -P_3^m / (6\ !) = -P_3^m / (6 \cdot 5\ !) = \dfrac{-1}{12} \cdot \dfrac{P_3^m}{P_3^5} = \dfrac{P_3^m}{4!} \cdot \dfrac{-1}{30}$ (4.5)

這 a_{m-3} 係數是 n^{m-3} 項的係數，是由初始數據點(4, −1/30)所率領數據點（m, a_{m-3})彙整計算而得，這 4 與−1/30 兩數都要同時出現在 a_{m-3} 的數值表示式形式中，即形成(4.5)式的 a_{m-3} 第 5 項位置係數的數值生成函數一般式結果。

(C5). 續比對第 6 項係數，得 $a_{m-4} = 0$ (4.6)

(C6). 續比對 $f(n)$ 的第 7 項係數 a_{m-5}。 得到下列數據點（m, a_{m-5})；有 (6, 1/42), (7, 1/12), (8, 2/9), (9,1/2), (10,1), (11,11/6), (12, 22/7), (13, 143/28), ⋯。

以下要編製出上述數據點的橫式均差運算表以求出 a_{m-5} 與 m 的函數關係；

m	6	7	8	9	10	11	12	13
a_{m-5}	1/42	1/12	2/9	1/2	1	11/6	22/7	143/28
1 階	5/84	5/36	5/18	1/2	5/6	55/42	55/28	
2 階	5/126	5/72	1/9	1/6	5/21	55/168		
3 階	5/504	1/72	1/54	1/42	5/168			
4 階	1/1008	1/864	1/756	1/672				
5 階	1/30240	1/30240	1/30240					

這列表中見到第 5 階運算列得到一個常數值 1/30240，就無需再運算到下一階。

直接應用[引理 2.]牛頓插值公式法，則由上表在 $m = 6$ 時的 6 個數值 1/42，5/84，5/126，5/504，1/1008 及 1/30240，可得到下述關係式；

$$a_{m-5} = \frac{1}{42} + \frac{5}{84}(m-6) + \frac{5}{126}(m-6)(m-7) + \frac{5}{504}(m-6)(m-7)(m-8)$$

$$+ \frac{1}{1008}(m-6)(m-7)(m-8)(m-9)$$

$$+ \frac{1}{30240}(m-6)(m-7)(m-8)(m-9)(m-10) \quad \text{(展開後，再化簡)}$$

$$= \frac{1}{30240}(m^5 - 10m^4 + 35m^3 - 50m^2 + 24m)$$

$$= \frac{1}{30240} m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) = \frac{1}{6 \cdot 7!} \cdot P_5^m$$

因而得到第 7 位置項係數　$a_{m-5} = \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{P_5^m}{P_5^7} = \dfrac{P_5^m}{6!} \cdot \dfrac{1}{42}$　(4.7)

這 a_{m-5} 係數是 n^{m-5} 項的係數，是由初始數據點(6, 1/42)所率領數據點（m , a_{m-5})彙整計算而得，即形成(4.7)式用以表示第 7 項位置係數的數值生成函數一般式。

(C7). 續比對第 8 項係數，得　$a_{m-6} = 0$　(4.8)

(C8). 繼續比對 $f(n)$ 的第 9 項係數 a_{m-7} 。 得到下列數據點（m , a_{m-7})；(8, −1/30), (9, −3/20), (10, −1/2), (11, −11/8), (12, −33/10), (13, −143/20), (14, −143/10), (15, −429/16), (16, −143/3), ⋯。

以下要編製出上述數據點的橫式均差運算表以求出 a_{m-7} 與 m 的函數關係；

m	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_{m-7}	−1/30	−3/20	−1/2	−11/8	−33/10	−143/20	−143/10	−429/16	−143/3
1 階	−7/60	−7/20	−7/8	−77/40	−77/20	−143/20	−1001/80	−1001/48	
2 階	−7/60	−21/80	−21/40	−77/80	−33/20	−429/160	−1001/240		
3 階	−35/720	−21/240	−35/240	−55/240	−165/480	−715/1440			
4 階	−28/2880	−14/960	−20/960	−55/1920	−220/5760				
5 階	−7/7200	−1/800	−3/1920	−11/5760					
6 階	−1/21600	−1/19200	−1/17280						
7 階	−1/1209600	−1/1209600							

這列表中見到第 7 階運算時得到一個常數值 −1/1209600，就無需再運算下一階。

直接應用[引理 2.]牛頓插值公式法，則由上表在 $m = 8$ 時的 8 個數值；−1/30，−7/60，−7/60，−35/720，−28/2880，−7/7200，−1/21600，及 −1/1209600，可得到下述關係式；

$$\begin{aligned} a_{m-7} = {} & \frac{-1}{30} + \frac{-7}{60}(m-8) + \frac{-7}{60}(m-8)(m-9) + \frac{-35}{720}(m-8)(m-9)(m-10) \\ & + \frac{-28}{2880}(m-8)(m-9)(m-10)(m-11) \\ & + \frac{-7}{7200}(m-8)(m-9)(m-10)(m-11)(m-12) \\ & + \frac{-1}{21600}(m-8)(m-9)(m-10)(m-11)(m-12)(m-13) \\ & + \frac{-1}{1209600}(m-8)(m-9)(m-10)(m-11)(m-12)(m-13)(m-14) \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{1209600}(m^7 - 21m^6 + 175m^5 - 735m^4 + 1624m^3 - 1764m^2 + 720m)$$

$$= \frac{-1}{1209600}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6) = \frac{-1}{30\cdot 8!}\cdot P_7^m$$

因而得到第 9 位置項係數 $a_{m-7} = \frac{-3}{20}\cdot\frac{P_7^m}{P_7^9} = \frac{P_7^m}{8\,!}\cdot\frac{-1}{30}$ (4.9)

這 a_{m-7} 係數是 n^{m-7} 項的係數，是由初始數據點(8, −1/30)所率領數據點 (m, a_{m-7})彙整計算而得，演算後即形成第 9 項位置係數 a_{m-7} 的數值生成函數一般式(4.9)式形態，這形態也與(4.3)式、(4.5)式、(4.7)式表示式形成類同結構。

(C9). 持續對前 16 式逐步觀察，比對整理，統合成：第 4 項及後續的所有連續偶數項係數都呈現為 0 的一致性結果，所以有 $a_{m-2} = a_{m-4} = a_{m-6} = a_{m-8} = \cdots = 0$ (4.10)

實際上，由[B].節的示範演算到 $\sum_{k=1}^{n}k^{16}$ 的公式都顯露出這樣(4.10)式的性質。

(C10). 再仔細觀察，比對整理，發現到當 $\sum_{k=1}^{n}k^{m}$ 的 m 值是偶數時，其公式的最後一項必為 n 的 1 次數項，且此最後一項的係數值恰提供了 (4.3)式、(4.5)式、(4.7)式、(4.9)式等各函數的相關量。因此，由 m =10 時，$\sum_{k=1}^{n}k^{10}$ 其公式的最後一項即第 11 項係數為 $\frac{5}{66}$，可仿效(4.3)式、(4.5)式、(4.7)式、(4.9)式之函數型態模式而寫出後續所有 $\sum_{k=1}^{n}k^{m}$ 的第 11 項位置係數(即 n^{m-9} 項的係數)的數值生成函數為 $a_{m-9} = \frac{P_9^m}{10\,!}\cdot\frac{5}{66}$ 或再化成為

$a_{m-9} = \frac{5}{12}\cdot\frac{P_9^m}{P_9^{11}} = \frac{P_9^m}{10\,!}\cdot\frac{5}{66}$ (4.11)

現在要檢視(4.11)式之數值生成函數的正確性；

m =10 時，$\sum_{k=1}^{n}k^{10}$ 的第 11 項位置係數 $a_1 = \frac{5}{66}$，正確。

m =11 時，$\sum_{k=1}^{n}k^{11}$ 的第 11 項位置係數 $a_2 = \frac{P_9^{11}}{10\,!}\cdot\frac{5}{66} = \frac{5}{12}$，正確。

m =12 時，$\sum_{k=1}^{n}k^{12}$ 的第 11 項位置係數 $a_3 = \frac{P_9^{12}}{10\,!}\cdot\frac{5}{66} = \frac{5}{3}$，正確。

$m=13$ 時，$\sum_{k=1}^{n} k^{13}$ 的第 11 項位置係數 $a_4=\dfrac{P_9^{13}}{10\,!}\cdot\dfrac{5}{66}=\dfrac{65}{12}$，正確。

$m=14$ 時，$\sum_{k=1}^{n} k^{14}$ 的第 11 項位置係數 $a_5=\dfrac{P_9^{14}}{10\,!}\cdot\dfrac{5}{66}=\dfrac{91}{6}$，正確。

$m=15$ 時，$\sum_{k=1}^{n} k^{15}$ 的第 11 項位置係數 $a_6=\dfrac{P_9^{15}}{10\,!}\cdot\dfrac{5}{66}=\dfrac{455}{12}$，正確。

$m=16$ 時，$\sum_{k=1}^{n} k^{16}$ 的第 11 項位置係數 $a_7=\dfrac{P_9^{16}}{10\,!}\cdot\dfrac{5}{66}=\dfrac{260}{3}$，正確。

故直到 $\sum_{k=1}^{n} k^{16}$ 的第 11 項位置係數，(4.11)式之數值生成函數是正確的。

(C11). 同理，在 $m=12$ 時，$\sum_{k=1}^{n} k^{12}$ 其公式的最後一項即第 13 項係數為 $\dfrac{-691}{2730}$，再仿效 (4.3)式、(4.5)式、(4.7)式、(4.9)式、(4.11)式之函數型態模式而寫出後續所有 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}$ 的第 13 項位置係數(即 n^{m-11}項的係數)的數值生成函數一般形式為 $a_{m-11}=\dfrac{P_{11}^{m}}{12\,!}\cdot\dfrac{-691}{2730}$ 或

再化成為 $$a_{m-11}=\frac{-691}{420}\cdot\frac{P_{11}^{m}}{P_{11}^{13}}=\frac{P_{11}^{m}}{12\,!}\cdot\frac{-691}{2730} \tag{4.12}$$

同樣檢視(4.12)式函數的正確性時，得 $m=12$、13、14、15、16 其第 13 項係數的各對應值都正確，顯示出目前的(4.12)式之數值生成函數是正確的。

(C12). 同理，在 $m=14$ 時，$\sum_{k=1}^{n} k^{14}$ 其公式的最後一項即第 15 項係數為 $\dfrac{7}{6}$，可寫出後續所有 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}$ 的第 15 項位置係數(即 n^{m-13} 項的係數) a_{m-13} 的數值生成函數為 $a_{m-13}=\dfrac{P_{13}^{m}}{14\,!}\cdot\dfrac{7}{6}$ 或再化成為 $$a_{m-13}=\frac{35}{4}\cdot\frac{P_{13}^{m}}{P_{13}^{15}}=\frac{P_{13}^{m}}{14\,!}\cdot\frac{7}{6} \tag{4.13}$$

一樣再檢視(4.13)式函數的正確性時，得 $m=14$、15、16 其第 15 項係數的各對應值都正確，顯示出目前的(4.13)式之數值生成函數是正確的。

$$\sum_{k=1}^{n} k^{14}=\frac{1}{15}n^{15}+\frac{1}{2}n^{14}+\frac{7}{6}n^{13}-\frac{91}{30}n^{11}+\frac{143}{18}n^{9}-\frac{143}{10}n^{7}+\frac{91}{6}n^{5}-\frac{691}{90}n^{3}+\frac{7}{6}n \tag{4.14}$$

(C13). 同理，在 $m=16$ 時，$\sum_{k=1}^{n} k^{16}$ 其公式的最後一項即第 17 項係數為 $\dfrac{-3617}{510}$，可寫出

後續所有 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}$ 的第 17 項位置係數(即 n^{m-15} 項的係數) a_{m-15} 的數值生成函數為 $a_{m-15}=$

$$\frac{P_{15}^{m}}{16\ !}\cdot\frac{-3617}{510} \quad\Rightarrow\quad a_{m-15}=\frac{-3617}{60}\cdot\frac{P_{15}^{m}}{P_{15}^{17}}=\frac{P_{15}^{m}}{16\ !}\cdot\frac{-3617}{510} \tag{4.15}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{16}=\frac{1}{17}n^{17}+\frac{1}{2}n^{16}+\frac{4}{3}n^{15}-\frac{14}{3}n^{13}+\frac{52}{3}n^{11}-\frac{143}{3}n^{9}+\frac{260}{3}n^{7}-\frac{1382}{15}n^{5}+\frac{140}{3}n^{3}-\frac{3617}{510}n \tag{4.16}$$

(C14). 接著要應用(4.1)式、(4.2)式、(4.3)式、(4.10)式、(4.5)式、(4.7)式、(4.9)式、 (4.11)式、(4.12)式、(4.13)式、(4.15)式之函數以求取 m =17 時 $\sum_{k=1}^{n} k^{17}$ 的公式，同時也要逐一檢視上述各(4.1)式 ～ (4.15)式之數值生成函數的正確性；得

$$\sum_{k=1}^{n} k^{17}=\frac{1}{18}n^{18}+\frac{1}{2}n^{17}+\frac{P_{1}^{17}}{2!}\cdot\frac{1}{6}n^{16}+\frac{P_{3}^{17}}{4!}\cdot\frac{-1}{30}n^{14}+\frac{P_{5}^{17}}{6!}\cdot\frac{1}{42}n^{12}+\frac{P_{7}^{17}}{8\ !}\cdot\frac{-1}{30}n^{10}$$
$$+\frac{P_{9}^{17}}{10\ !}\cdot\frac{5}{66}n^{8}+\frac{P_{11}^{17}}{12\ !}\cdot\frac{-691}{2730}n^{6}+\frac{P_{13}^{17}}{14\ !}\cdot\frac{7}{6}n^{4}+\frac{P_{15}^{17}}{16\ !}\cdot\frac{-3617}{510}n^{2}+a_{1}n \quad \text{(展開、化簡)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{17}=\frac{1}{18}n^{18}+\frac{1}{2}n^{17}+\frac{7}{12}n^{16}+\frac{-17}{3}n^{14}+\frac{221}{9}n^{12}+\frac{-2431}{30}n^{10}+\frac{1105}{6}n^{8}$$
$$+\frac{-11747}{45}n^{6}+\frac{595}{3}n^{4}+\frac{-3617}{60}n^{2}+a_{1}n \tag{4.17}$$

這(4.17)式出現了 1 個未知數 a_1，求取 a_1 的方式是取 n =1，則 $\sum_{k=1}^{n} k^{17}$ 的值恰為 1，故將 n =1 代入(4.17)式，以計算其未知數 a_1 值。得

$$\sum_{k=1}^{1} k^{17}=\frac{1}{18}+\frac{1}{2}+\frac{7}{12}+\frac{-17}{3}+\frac{221}{9}+\frac{-2431}{30}+\frac{1105}{6}+\frac{-11747}{45}+\frac{595}{3}+\frac{-3617}{60}+a_{1}=1$$

仔細精準計算，得出 $a_1=0$ ，即 $a_1=a_{17-16}=a_{m-16}=0$ (4.10)

所以，恰得到完整正確的下列多項式 (4.17)式；

$$\sum_{k=1}^{n} k^{17}=\frac{1}{18}n^{18}+\frac{1}{2}n^{17}+\frac{7}{12}n^{16}+\frac{-17}{3}n^{14}+\frac{221}{9}n^{12}+\frac{-2431}{30}n^{10}+\frac{1105}{6}n^{8}$$
$$+\frac{-11747}{45}n^{6}+\frac{595}{3}n^{4}+\frac{-3617}{60}n^{2} \tag{4.17}$$

找到了 m =17 時的(4.17)式公式。同時也一併具體驗證了上述各(4.1)式 ～ (4.15)式之所有

數值生成函數的正確性。

(C15). $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 公式內涵的另一特徵是：每一完整公式皆含有（$n+1$）的因式。

自[A].節的完整橫式均差運算表中應用牛頓插值公式法可寫出 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 公式；得

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = 0 + 1n + \frac{2^m - 1}{2} \cdot n(n-1) + \frac{3^m - 2\cdot 2^m + 1}{6} \cdot n(n-1)(n-2) + \cdots$$

$$+ \frac{\sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^m (m+1-r)^m}{(m+1)\,!} \cdot n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots (n-m-1)(n-m)$$

$$= \sum_{u=1}^{m+1} \left[\frac{\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^r C_r^{u-1}(u-r)^m}{u\,!} \cdot n(n-1)(n-2) \cdots (n-u)(n-u+1) \right]$$

$$= \sum_{u=1}^{m+1} \left\{ \frac{\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^r C_r^{u-1}(u-r)^m}{u\,!} \cdot [(n+1)-1]\,[(n+1)-2]\,[(n+1)-3] \cdots [(n+1)-u] \right\}$$

$$= \sum_{u=1}^{m+1} \left\{ \frac{\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^r C_r^{u-1}(u-r)^m}{u\,!} \cdot [g_u(n+1) + (-1)^u \cdot u\,!] \right\} \qquad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{u=1}^{m+1} \left\{ \frac{\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^r C_r^{u-1}(u-r)^m}{u\,!} \cdot g_u(n+1) \right\}$$

$$+ \sum_{u=1}^{m+1} \left[\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^{u+r} C_r^{u-1}(u-r)^m \right] \qquad (*)$$

(*)式等號右側的第 1 項是含有因式($n+1$)的多項式，而第 2 項是恆等式 0，將第 2 項 $\sum_{u=1}^{m+1}$ $\left[\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^{u+r} C_r^{u-1}(u-r)^m \right]$ 取 m 值一一展開，可得出其真確值為 0；如

$m=3$ 時，$\sum_{u=1}^{4} \left[\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^{u+r} C_r^{u-1}(u-r)^3 \right] = [-1^3] + [2^3 - 1^3] - [3^3 - 2\cdot 2^3 + 1^3]$

$$+ [4^3 - 3\cdot 3^3 + 3\cdot 2^3 - 1^3] = 4^3 - 4\cdot 3^3 + 6\cdot 2^3 - 4\cdot 1^3 = 0$$

$$= C_0^4 \cdot 4^3 - C_1^4 \cdot 3^3 + C_2^4 \cdot 2^3 - C_3^4 \cdot 1^3$$

$m=4$ 時，$\sum_{u=1}^{5} \left[\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^{u+r} C_r^{u-1}(u-r)^4 \right] = -1^4 + [2^4 - 1^4] - [3^4 - 2\cdot 2^4 + 1^4]$

$$+ [4^4 - 3\cdot 3^4 + 3\cdot 2^4 - 1^4] - [5^4 - 4\cdot 4^4 + 6\cdot 3^4 - 4\cdot 2^4 + 1^4]$$

$$= -[C_0^5 \cdot 5^4 - C_1^5 \cdot 4^4 + C_2^5 \cdot 3^4 - C_3^5 \cdot 2^4 + C_4^5 \cdot 1^4] = 0$$

… … …

$m=m$ 時， $\sum_{u=1}^{m+1}[\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^{u+r}C_r^{u-1}(u-r)^m]=(-1)^{m-1}\cdot[C_0^{m+1}(m+1)^m-C_1^{m+1}m^m$

$+C_2^{m+1}(m-1)^m-C_3^{m+1}(m-2)^m+\cdots+(-1)^t\cdot C_t^{m+1}(m+1-t)^m+\cdots+(-1)^m\cdot C_m^{m+1}\cdot 1^m]$

$=(-1)^{m-1}\cdot\sum_{t=0}^{m}(-1)^t C_t^{m+1}(m+1-t)^m \qquad \Rightarrow$

$$\sum_{u=1}^{m+1}[\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^{u+r}C_r^{u-1}(u-r)^m]=(-1)^{m-1}\cdot\sum_{t=0}^{m}(-1)^t C_t^{m+1}(m+1-t)^m$$

$$=(-1)^{m-1}\cdot\sum_{t=0}^{m+1}(-1)^t C_t^{m+1}(m+1-t)^m=0 \qquad (**)$$

(**)式等號右側的 $\sum_{t=0}^{m}(-1)^t C_t^{m+1}(m+1-t)^m=\sum_{t=0}^{m+1}(-1)^t C_t^{m+1}(m+1-t)^m=0$ 是 0 的恆等式；因這組合級數中 C_t^{m+1}的上數是 $m+1$，而 $(m+1-t)^m$的冪次數是 m 次，冪次數 m 小於 C_t^{m+1}的上數 $m+1$ 使得這組合級數展開來運算結果必為 0，此可參考「含有組合數的級數和之數值」公式，文獻[5] [6]。將(**)式代入(*)式中，得

$$\sum_{k=1}^{n}k^m=\sum_{u=1}^{m+1}\{\frac{\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^r C_r^{u-1}(u-r)^m}{u!}\cdot g_u(n+1)\}=h(n+1) \qquad (***)$$

(***)式結構式證明了 $\sum_{k=1}^{n}k^m=f(n)=h(n+1)$ 多項式含有 $(n+1)$的因式。

【待 續】