以函數形式描述前 N 個連續正整數等冪次和的多項式係數(下)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

(C16). 繼續要應用上述各(4.1)式 ～ (4.15)式以求取 $m=18$ 時 $\sum_{k=1}^{n}k^{18}$ 的公式，同時也要逐一檢視上述各(4.1)式 ～ (4.15)式函數的正確性；得

$$\sum_{k=1}^{n}k^{18}=\frac{1}{19}n^{19}+\frac{1}{2}n^{18}+\frac{P_1^{18}}{2!}\cdot\frac{1}{6}n^{17}+\frac{P_3^{18}}{4!}\cdot\frac{-1}{30}n^{15}+\frac{P_5^{18}}{6!}\cdot\frac{1}{42}n^{13}+\frac{P_7^{18}}{8\,!}\cdot\frac{-1}{30}n^{11}$$
$$+\frac{P_9^{18}}{10\,!}\cdot\frac{5}{66}n^{9}+\frac{P_{11}^{18}}{12\,!}\cdot\frac{-691}{2730}n^{7}+\frac{P_{13}^{18}}{14\,!}\cdot\frac{7}{6}n^{5}+\frac{P_{15}^{18}}{16\,!}\cdot\frac{-3617}{510}n^{3}+a_2n^2+a_1n$$

(展開、化簡，得)

$$\sum_{k=1}^{n}k^{18}=\frac{1}{19}n^{19}+\frac{1}{2}n^{18}+\frac{3}{2}n^{17}+\frac{-34}{5}n^{15}+34n^{13}+\frac{-663}{5}n^{11}+\frac{1105}{3}n^{9}+\frac{-23494}{35}n^{7}$$
$$+714n^{5}+\frac{-3617}{10}n^{3}+a_2n^2+a_1n$$

此刻出現了 2 個未知數 a_2 與 a_1，求取 a_2 與 a_1 的方式仍是取 $n=1$，則 $\sum_{k=1}^{n}k^{18}$ 的值恰為 1；再因 $\sum_{k=1}^{n}k^{m}=f(n)=h(n+1)$ 多項式含有 $(n+1)$的因式，可由因(餘)式定理，取 $n=-1$，則由 $\sum_{k=1}^{n}k^{18}=f(n)=h(n+1)$，其 $f(-1)=0$，得下列 2 式；

$$\sum_{k=1}^{1}k^{18}=\frac{1}{19}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{-34}{5}+34+\frac{-663}{5}+\frac{1105}{3}+\frac{-23494}{35}+714+\frac{-3617}{10}+a_2+a_1\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{19}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{-34}{5}+34+\frac{-663}{5}+\frac{1105}{3}+\frac{-23494}{35}+714+\frac{-3617}{10}+a_2+a_1=1 \qquad \text{(s.1)}$$

與 $\sum_{k=1}^{n}k^{18}=f(n)$ 有 $(n+1)$的因式 $\Rightarrow$ $f(-1)=\frac{-1}{19}+\frac{1}{2}+\frac{-3}{2}+\frac{34}{5}-34$

$$+\frac{663}{5}+\frac{-1105}{3}+\frac{23494}{35}-714+\frac{3617}{10}+\ a_2\ -a_1=0 \qquad \text{(s.2)}$$

對(s.1)式 與(s.2)式詳細精確計算，得 $a_2+a_1=\frac{43867}{798}$ 與 $a_2\ -a_1=\ -\frac{43867}{798}$

$\Rightarrow$ 作聯立運算，得出 $a_2=0$ ，即 $a_2=\ a_{18-16}\ =\ a_{m-16}=0$ (4.10)

與 $a_1=\ \frac{43867}{798}$ ，因此，得完整的 m =18 公式如下所述；

$$\sum_{k=1}^{n}k^{18}=\ \frac{1}{19}n^{19}+\frac{1}{2}n^{18}+\frac{3}{2}\ n^{17}+\frac{-34}{5}\ n^{15}+34\ n^{13}+\frac{-663}{5}\ n^{11}+\frac{1105}{3}\ n^{9}+\frac{-23494}{35}\ n^{7}$$

$$+714\ n^{5}+\frac{-3617}{10}\ n^{3}+\ \frac{43867}{798}\ n \qquad (4.18)$$

再將(4.18)式第 19 項位置係數(即 n^{m-17} 項的係數) a_{m-17} 數值 $\frac{43867}{798}$ 寫成生成函數為

$$a_{m-17}=\ \frac{P_{17}^{m}}{18\ !}\cdot\frac{43867}{798} \quad\Rightarrow\quad a_{m-17}=\frac{43867}{84}\cdot\frac{P_{17}^{m}}{P_{17}^{19}}=\ \frac{P_{17}^{m}}{18\ !}\cdot\frac{43867}{798} \qquad (4.18^*)$$

逐步推進，又增列推演出 $\sum_{k=1}^{n}k^{18}$ 的(4.18)式與(4.18*)式數值生成函數並也再具體驗證了上述各(4.1)式 ～ (4.15)式所有生成函數的正確性。

(C17). 繼續應用各(4.1)式 ～ (4.18*)式函數來求取 m =19 時 $\sum_{k=1}^{n}k^{19}$ 的公式，同時也要逐一檢視上述各(4.1)式 ～ (4.18*)式函數的正確性；得

$$\sum_{k=1}^{n}k^{19}=\ \frac{1}{20}n^{20}+\frac{1}{2}n^{19}+\frac{P_{1}^{19}}{2!}\cdot\frac{1}{6}\ n^{18}+\frac{P_{3}^{19}}{4!}\cdot\frac{-1}{30}\ n^{16}+\frac{P_{5}^{19}}{6!}\cdot\frac{1}{42}\ n^{14}+\frac{P_{7}^{19}}{8\ !}\cdot\frac{-1}{30}\ n^{12}$$

$$+\frac{P_{9}^{19}}{10\ !}\cdot\frac{5}{66}\ n^{10}+\frac{P_{11}^{19}}{12\ !}\cdot\frac{-691}{2730}\ n^{8}+\frac{P_{13}^{19}}{14\ !}\cdot\frac{7}{6}\ n^{6}+\frac{P_{15}^{19}}{16\ !}\cdot\frac{-3617}{510}\ n^{4}+\frac{P_{17}^{19}}{18\ !}\cdot\frac{43867}{798}\ n^{2}+a_1\ n$$

(展開、化簡，得)

$$\sum_{k=1}^{n}k^{19}=\ \frac{1}{20}n^{20}+\frac{1}{2}n^{19}+\frac{19}{12}\ n^{18}+\frac{-323}{40}\ n^{16}+\frac{323}{7}\ n^{14}+\frac{-4199}{20}\ n^{12}+\frac{4199}{6}\ n^{10}$$

$$+\frac{-223193}{140}\ n^{8}+2261\ n^{6}+\frac{-68723}{40}\ n^{4}+\frac{43867}{84}\ n^{2}+a_1\ n \qquad (4.19)$$

取 $n=1$ 代入(4.19)式，$\sum_{k=1}^{1} k^{19}=1$，以計算其未知數 a_1 值。得

$$\sum_{k=1}^{1} k^{19}=\frac{1}{20}+\frac{1}{2}+\frac{19}{12}+\frac{-323}{40}+\frac{323}{7}+\frac{-4199}{20}+\frac{4199}{6}+\frac{-223193}{140}+2261+\frac{-68723}{40}$$

$$+\frac{43867}{84}+a_1=1 \quad\Rightarrow\quad a_1=a_{19-18}=a_{m-18}=0 \tag{4.10}$$

得 $$\sum_{k=1}^{n} k^{19}=\frac{1}{20}n^{20}+\frac{1}{2}n^{19}+\frac{19}{12}n^{18}+\frac{-323}{40}n^{16}+\frac{323}{7}n^{14}+\frac{-4199}{20}n^{12}+\frac{4199}{6}n^{10}$$

$$+\frac{-223193}{140}n^{8}+2261n^{6}+\frac{-68723}{40}n^{4}+\frac{43867}{84}n^{2} \tag{4.19}$$

求出了 $\sum_{k=1}^{n} k^{19}$ 的(4.19)式，並也具體驗證了上述各(4.1)式 ～ (4.18*)式之所有對應的生成函數的正確性。

(C18). 繼續再應用上述各(4.1)式 ～ (4.18*)式函數來求取 $m=20$ 時 $\sum_{k=1}^{n} k^{20}$ 的公式，同時也要逐一檢視各(4.1)式 ～ (4.18*)式函數的正確性；得

$$\sum_{k=1}^{n} k^{20}=\frac{1}{21}n^{21}+\frac{1}{2}n^{20}+\frac{P_1^{20}}{2!}\cdot\frac{1}{6}n^{19}+\frac{P_3^{20}}{4!}\cdot\frac{-1}{30}n^{17}+\frac{P_5^{20}}{6!}\cdot\frac{1}{42}n^{15}+\frac{P_7^{20}}{8\,!}\cdot\frac{-1}{30}n^{13}$$

$$+\frac{P_9^{20}}{10\,!}\cdot\frac{5}{66}n^{11}+\frac{P_{11}^{20}}{12\,!}\cdot\frac{-691}{2730}n^{9}+\frac{P_{13}^{20}}{14\,!}\cdot\frac{7}{6}n^{7}+\frac{P_{15}^{20}}{16\,!}\cdot\frac{-3617}{510}n^{5}+\frac{P_{17}^{20}}{18\,!}\cdot\frac{43867}{798}n^{3}+a_1 n$$

此處，省略了 $a_2=0$ 的計算證明，也滿足了 $a_2=a_{20-18}=a_{m-18}=0$ (4.10)

將上述 $\sum_{k=1}^{n} k^{20}$ 的各項結構型式加以展開、化簡，得

$$\sum_{k=1}^{n} k^{20}=\frac{1}{21}n^{21}+\frac{1}{2}n^{20}+\frac{5}{3}n^{19}+\frac{-19}{2}n^{17}+\frac{1292}{21}n^{15}+(-323)n^{13}+\frac{41990}{33}n^{11}$$

$$+\frac{-223193}{63}n^{9}+6460n^{7}+\frac{-68723}{10}n^{5}+\frac{219335}{63}n^{3}+a_1 n \tag{4.20}$$

取 $n=1$ 代入(4.20)式，$\sum_{k=1}^{1} k^{20}=1$，以計算其未知數 a_1 值。得

$$\sum_{k=1}^{1} k^{20} = \frac{1}{21}+\frac{1}{2}+\frac{5}{3}+\frac{-19}{2}+\frac{1292}{21}+(-323)+\frac{41990}{33}+\frac{-223193}{63}+6460+\frac{-68723}{10}$$

$$+\frac{219335}{63}+a_1=1 \quad \Rightarrow \quad a_1=\frac{-174611}{330}$$ ，得完整的 m =20 公式如下；

$$\sum_{k=1}^{n} k^{20} = \frac{1}{21}n^{21}+\frac{1}{2}n^{20}+\frac{5}{3}n^{19}+\frac{-19}{2}n^{17}+\frac{1292}{21}n^{15}+(-323)n^{13}+\frac{41990}{33}n^{11}$$
$$+\frac{-223193}{63}n^{9}+6460n^{7}+\frac{-68723}{10}n^{5}+\frac{219335}{63}n^{3}+\frac{-174611}{330}n \tag{4.20}$$

再將最後一項係數值 $a_{m-19}=\frac{-174611}{330}$ 寫成第 21 項位置係數(即 n^{m-19} 項的係數)的生成函數為 $a_{m-19}=\frac{P_{19}^{m}}{20\,!}\cdot\frac{-174611}{330}$ 或再寫成為下列型式

$$a_{m-19}=\frac{-1222277}{220}\cdot\frac{P_{19}^{m}}{P_{19}^{21}}=\frac{P_{19}^{m}}{20\,!}\cdot\frac{-174611}{330} \tag{4.20*}$$

逐步推進，又增列推演出 $\sum_{k=1}^{n} k^{20}$ 的(4.20)式 與 (4.20*)式生成函數並也具體驗證了上述各(4.1)式 ～ (4.18*)式所有對應生成函數的正確性。

(C19). 同理，再應用上述各(4.1)式 ～ (4.20*)式函數來求取 m =21 時 $\sum_{k=1}^{n} k^{21}$ 的公式，同時也要逐一檢視各(4.1)式 ～ (4.20*)式函數的正確性；(略)，得

$$\sum_{k=1}^{n} k^{21} = \frac{1}{22}n^{22}+\frac{1}{2}n^{21}+\frac{7}{4}n^{20}+\frac{-133}{12}n^{18}+\frac{323}{4}n^{16}+\frac{-969}{2}n^{14}+\frac{146965}{66}n^{12}$$
$$+\frac{-223193}{30}n^{10}+\frac{33915}{2}n^{8}+\frac{-481061}{20}n^{6}+\frac{219335}{12}n^{4}+\frac{-1222277}{220}n^{2} \tag{4.21}$$

且其第 22 項位置的係數 a_1 ；有 $a_1=a_{21-20}=a_{m-20}=0$ (4.10)

(C20). 同理，取 $m = 22$ 時，可得 $\sum_{k=1}^{n} k^{22}$ 的多項式公式；

$$\sum_{k=1}^{n} k^{22} = \frac{1}{23}n^{23} + \frac{1}{2}n^{22} + \frac{11}{6}n^{21} + \frac{-77}{6}n^{19} + \frac{209}{2}n^{17} + \frac{-3553}{5}n^{15} + \frac{11305}{3}n^{13}$$

$$+ \frac{-223193}{15}n^{11} + \frac{124355}{3}n^{9} + \frac{-755953}{10}n^{7} + \frac{482537}{6}n^{5} + \frac{-1222277}{30}n^{3}$$

$$+ \frac{854513}{138}n \tag{4.22}$$

且其第 22 項位置的係數 a_2；有 $a_2 = a_{22-20} = a_{m-20} = 0$ (4.10)

再將最後一項係數值 $a_{m-21} = \dfrac{854513}{138}$ 寫成第 23 項位置係數(即 n^{m-21}項的係數)

a_{m-21}的生成函數為 $a_{m-21} = \dfrac{P_{21}^{m}}{22\,!} \cdot \dfrac{854513}{138}$ 或再寫成為下列型式

$$a_{m-21} = \frac{854513}{12} \cdot \frac{P_{21}^{m}}{P_{21}^{23}} = \frac{P_{21}^{m}}{22\,!} \cdot \frac{854513}{138} \tag{4.22*}$$

(C21). 同理，取 $m = 23$ 時，可得 $\sum_{k=1}^{n} k^{23}$ 的多項式公式；

$$\sum_{k=1}^{n} k^{23} = \frac{1}{24}n^{24} + \frac{1}{2}n^{23} + \frac{23}{12}n^{22} + \frac{-1771}{120}n^{20} + \frac{4807}{36}n^{18} + \frac{-81719}{80}n^{16} + \frac{37145}{6}n^{14}$$

$$+ \frac{-5133439}{1800}n^{12} + \frac{572033}{6}n^{10} + \frac{-17386919}{80}n^{8} + \frac{11098351}{36}n^{6} + \frac{-28112371}{120}n^{4}$$

$$+ \frac{854513}{12}n^{2} \tag{4.23}$$

且其第 24 項位置的係數 a_1；有 $a_1 = a_{23-22} = a_{m-22} = 0$ **(4.10)**

(C22). 持續仿效上述的所有同樣推演運算，必能逐一按次序推演出 $m = 24$、25、26、 …、

等等各種後續 m 值的 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}$ 的多項式公式。

[D]. $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的各項係數生成函數式類型

將已計算出的 $m=2$ ～ $m=23$ 這所有公式集結起來，全面對其各項係數內涵作比對分析，蒐集整理，進而歸納出逐步化演繹的 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 公式運算，以整合成很有規律的各項係數生成函數式 2 大類型，類型分明，結構型式如下；

(i). *偶數類型*：當 m 為偶數值時，其 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的各項係數生成函數式為下式；

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^m &= \frac{1}{m+1}n^{m+1}+\frac{1}{2}n^m+\frac{P_1^m}{2\,!}\cdot\frac{1}{6}n^{m-1}+\frac{P_3^m}{4!}\cdot\frac{-1}{30}\,n^{m-3}+\frac{P_5^m}{6!}\cdot\frac{1}{42}\,n^{m-5}+\frac{P_7^m}{8\,!}\cdot\frac{-1}{30}\,n^{m-7}\\ &+\frac{P_9^m}{10\,!}\cdot\frac{5}{66}\,n^{m-9}+\frac{P_{11}^m}{12\,!}\cdot\frac{-691}{2730}\,n^{m-11}+\frac{P_{13}^m}{14\,!}\cdot\frac{7}{6}\,n^{m-13}+\frac{P_{15}^m}{16\,!}\cdot\frac{-3617}{510}\,n^{m-15}\\ &+\frac{P_{17}^m}{18\,!}\cdot\frac{43867}{798}\,n^{m-17}+\frac{P_{19}^m}{20\,!}\cdot\frac{-174611}{330}\,n^{m-19}+\frac{P_{21}^m}{22\,!}\cdot\frac{854513}{138}\,n^{m-21}\\ &+\frac{P_{23}^m}{24\,!}\cdot a_{m-23}\cdot n^{m-23}+\frac{P_{25}^m}{26\,!}\cdot a_{m-25}\cdot n^{m-25}+\frac{P_{27}^m}{28\,!}\cdot a_{m-27}\cdot n^{m-27}+\cdots\cdots\\ &+\frac{P_{2u-1}^m}{(2u)\,!}\cdot a_{m-(2u-1)}\cdot n^{m-(2u-1)}+\cdots+\frac{P_{m-3}^m}{(m-2)!}\cdot a_3\cdot n^3+\frac{P_{m-1}^m}{(m)!}\cdot a_1\cdot n\end{aligned}\tag{5}$$

$u=1$、2、3、4、5、⋯、10、11、⋯、$(m/2)-1$、$(m/2)$ 等等連續正整數。

只要將 $m\le 22$ 的偶數數值代入(5)式，即可計算出該型的正確完整多項式公式。

同理，持續仿效上述(C15).節的所有同樣推演運算，必能由(5)式逐一按次序推演出 $m=24$、26、28、30、 ⋯、等等各種後續 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的 m 為偶數值多項式公式。

(ii). *奇數類型*：當 m 為奇數值時，其 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的各項係數生成函數式為下式；

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^m &= \frac{1}{m+1}n^{m+1}+\frac{1}{2}n^m+\frac{1}{4}\cdot\frac{P_1^m}{P_1^3}n^{m-1}+\frac{-1}{12}\cdot\frac{P_3^m}{P_3^5}\,n^{m-3}+\frac{1}{12}\cdot\frac{P_5^m}{P_5^7}\,n^{m-5}+\frac{-3}{20}\cdot\frac{P_7^m}{P_7^9}\,n^{m-7}\\ &+\frac{5}{12}\cdot\frac{P_9^m}{P_9^{11}}\,n^{m-9}+\frac{-691}{420}\cdot\frac{P_{11}^m}{P_{11}^{13}}\,n^{m-11}+\frac{35}{4}\cdot\frac{P_{13}^m}{P_{13}^{15}}\,n^{m-13}+\frac{-3617}{60}\cdot\frac{P_{15}^m}{P_{15}^{17}}\,n^{m-15}\\ &+\frac{43867}{84}\cdot\frac{P_{17}^m}{P_{17}^{19}}\,n^{m-17}+\frac{-1222277}{220}\cdot\frac{P_{19}^m}{P_{19}^{21}}\,n^{m-19}+\frac{854513}{12}\cdot\frac{P_{21}^m}{P_{21}^{23}}\,n^{m-21}\end{aligned}$$

$$+\ a_{m-23}\cdot\frac{P_{23}^{m}}{P_{23}^{25}}\,n^{m-23}\ +\ a_{m-25}\cdot\frac{P_{25}^{m}}{P_{25}^{27}}\,n^{m-25}\ +\ a_{m-27}\cdot\frac{P_{27}^{m}}{P_{27}^{29}}\,n^{m-27}\ +\ \cdots\cdots$$

$$+\,a_{m-(2u-1)}\cdot\frac{P_{2u-1}^{m}}{P_{2u-1}^{2u+1}}\,n^{m-(2u-1)}\ +\ \cdots\ +\ a_{4}\cdot\frac{P_{m-4}^{m}}{P_{m-4}^{m-2}}\,n^{4}\ +\ a_{2}\cdot\frac{P_{m-2}^{m}}{P_{m-2}^{m}}\,n^{2} \qquad (6)$$

u = 1、2、3、4、⋯、10、11、⋯、(m −3)/2、(m −1)/2 等等連續正整數。

只要將 $m\leq 23$ 的奇數數值代入(6)式，即可計算出該型的正確完整多項式公式。

同理,持續仿效上述(C15).節的所有同樣推演運算,必能由(6)式逐一按次序推演出 m = 25、27、29、31、 ⋯、等等各種後續 $\sum_{k=1}^{n}k^{m}$ 的 m 為奇數值多項式公式。

但無論是何種類型，其自第 4 項位置起， $a_{m-2}=a_{m-4}=a_{m-6}=a_{m-8}=a_{m-10}=\cdots=0$

以上的(5)式與(6)式所獲得的各項係數生成函數式運算公式就是依據本文主題逐步式遞推演繹流程，以推導出更高 m 值公式的推演模式法則所完成。

[E]. 1 與 −1 的統合思維：

再審視比對前 m =1 ～ m =23 的 $\sum_{k=1}^{n}k^{m}$ 各型公式所含有的項數與數值性質；

(E1). 兩兩項數相等而成對：

m =2 與 m =3 公式的項數都是 3 項 (不含係數為 0 的項數)，恰為一對。m =4 與 m =5 公式的項數都是 4 項(不含係數為 0 的項數)，恰為一對。⋯，以下類同。所有的偶數值 m 與其後續的奇數值 m +1 恰成一對，其 $\sum_{k=1}^{n}k^{m}$ 公式的項數皆可應用配型運算歸納成為 $\frac{1}{2}$ $[\,m+\frac{7+(-1)^{m}}{2}\,]$ 項，m 為正整數。

(E2). 對 $\sum_{k=1}^{n}k^{m}=\sum_{k=0}^{n}k^{m}$ 各型公式取 n =1 的數值性質：

取 n =1 時，各型公式的恆等式數值皆為 1，因此得到數值為 1 的眾多恆等式。

$\sum_{k=0}^{1}k^{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$ ， $\sum_{k=0}^{1}k^{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$ ，

$\sum_{k=0}^{1}k^{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{30}=1$ ， $\sum_{k=0}^{1}k^{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=1$ ，

$\sum_{k=0}^{1} k^6 = \frac{1}{7}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{42} = 1$，　　$\sum_{k=0}^{1} k^7 = \frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{7}{12}-\frac{7}{24}+\frac{1}{12} = 1$，

$\vdots$

$$\sum_{k=0}^{1} k^{22} = \frac{1}{23}+\frac{1}{2}+\frac{11}{6}+\frac{-77}{6}+\frac{209}{2}+\frac{-3553}{5}+\frac{11305}{3}+\frac{-223193}{15}+\frac{124355}{3}+\frac{-755953}{10}$$

$$+\frac{482537}{6}+\frac{-1222277}{30}+\frac{854513}{138} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{1} k^{23} = \frac{1}{24}+\frac{1}{2}+\frac{23}{12}+\frac{-1771}{120}+\frac{4807}{36}+\frac{-81719}{80}+\frac{37145}{6}+\frac{-5133439}{1800}+\frac{572033}{6}$$

$$+\frac{-17386919}{80}+\frac{11098351}{36}+\frac{-28112371}{120}+\frac{854513}{12} = 1$$

(E3). 應用這 n =1 與 n = −1 的概念逐步運算成後續每擴增 1 項的公式：

當 m = 24，求取 (24+4)/2=14 項數且取 n =1 時，數值為 1 的恆等式；

由 (5)式型態配合 m = 24 且取 n =1 時，可得下列 15 項數值運算式；

$$\sum_{k=1}^{n} k^{24} = \frac{1}{24+1}n^{25}+\frac{1}{2}n^{24}+\frac{P_1^{24}}{2\,!}\cdot\frac{1}{6}n^{23}+\frac{P_3^{24}}{4!}\cdot\frac{-1}{30}n^{21}+\frac{P_5^{24}}{6!}\cdot\frac{1}{42}n^{19}+\frac{P_7^{24}}{8\,!}\cdot\frac{-1}{30}n^{17}$$

$$+\frac{P_9^{24}}{10\,!}\cdot\frac{5}{66}n^{15}+\frac{P_{11}^{24}}{12\,!}\cdot\frac{-691}{2730}n^{13}+\frac{P_{13}^{24}}{14\,!}\cdot\frac{7}{6}n^{11}+\frac{P_{15}^{24}}{16\,!}\cdot\frac{-3617}{510}n^{9}+\frac{P_{17}^{24}}{18\,!}\cdot\frac{43867}{798}n^{7}$$

$$+\frac{P_{19}^{24}}{20\,!}\cdot\frac{-174611}{330}n^{5}+\frac{P_{21}^{24}}{22\,!}\cdot\frac{854513}{138}n^{3}+a_2\,n^2+a_1\,n \qquad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{1} k^{24} = \frac{1}{24+1}+\frac{1}{2}+\frac{P_1^{24}}{2\,!}\cdot\frac{1}{6}+\frac{P_3^{24}}{4!}\cdot\frac{-1}{30}+\frac{P_5^{24}}{6!}\cdot\frac{1}{42}+\frac{P_7^{24}}{8\,!}\cdot\frac{-1}{30}+\frac{P_9^{24}}{10\,!}\cdot\frac{5}{66}+\frac{P_{11}^{24}}{12\,!}\cdot\frac{-691}{2730}$$

$$+\frac{P_{13}^{24}}{14\,!}\cdot\frac{7}{6}+\frac{P_{15}^{24}}{16\,!}\cdot\frac{-3617}{510}+\frac{P_{17}^{24}}{18\,!}\cdot\frac{43867}{798}+\frac{P_{19}^{24}}{20\,!}\cdot\frac{-174611}{330}+\frac{P_{21}^{24}}{22\,!}\cdot\frac{854513}{138}+a_2+a_1 = 1$$

仔細將上式展開作精確運算，得

$$\frac{1}{25}+\frac{1}{2}+2+\frac{-253}{15}+\frac{506}{3}+\frac{-14421}{10}+\frac{29716}{3}+\frac{-10266878}{195}+208012+\frac{-17386919}{30}$$

$$+\frac{22196702}{21}+\frac{-28112371}{25}+\frac{1709026}{3}+a_2+a_1 = 1 \qquad \Rightarrow$$

整合計算，化簡，得 ；　　$a_2+a_1 = \frac{-236364091}{2730}$　　(s.3)

再應用 $\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n)$ 具有 $(n+1)$ 的因式，使 $f(-1)=0$ 的因式性質，得

$$\sum_{k=1}^{n} k^{24} = f(n) \Rightarrow f(-1) = \frac{-1}{25}+\frac{1}{2}-2+\frac{253}{15}+\frac{-506}{3}+\frac{14421}{10}+\frac{-29716}{3}+\frac{10266878}{195}$$

$$-208012+\frac{17386919}{30}+\frac{-22196702}{21}+\frac{28112371}{25}+\frac{-1709026}{3}+a_2-a_1=0 \quad \Rightarrow$$

整合計算，化簡，得 ； $a_2 - a_1 = \dfrac{236364091}{2730}$ (s.4)

對(s.3)式與(s.4)式作聯立運算，得出 $a_2=0$，即 $a_2 = a_{24-22} = a_{m-22} = 0$ (4.10)

與 $a_1 = \dfrac{-236364091}{2730}$ ，因此，得完整的 m =24 公式 14 項數如下所述；

$$\sum_{k=1}^{n} k^{24} = \frac{1}{25}n^{25}+\frac{1}{2}n^{24}+2n^{23}+\frac{-253}{15}n^{21}+\frac{506}{3}n^{19}+\frac{-14421}{10}n^{17}+\frac{29716}{3}n^{15}$$
$$+\frac{-10266878}{195}n^{13}+208012n^{11}+\frac{-17386919}{30}n^{9}+\frac{22196702}{21}n^{7}$$
$$+\frac{-28112371}{25}n^{5}+\frac{1709026}{3}n^{3}+\frac{-236364091}{2730}n \qquad \textbf{(4.24)}$$

再將最後一項係數值 $a_{m-23} = \dfrac{-236364091}{2730}$ 寫成第 25 項位置係數(即 n^{m-23} 項的係數)的生成函數為 $a_{m-23} = \dfrac{P_{23}^m}{24\,!}\cdot\dfrac{-236364091}{2730}$ 或再寫成為下列型式

$$a_{m-23} = \frac{-1181820455}{1092}\cdot\frac{P_{23}^m}{P_{23}^{25}} = \frac{P_{23}^m}{24\,!}\cdot\frac{-236364091}{2730} \qquad \textbf{(4.24*)}$$

(E4). 由(4.24*)式， *偶數類型* 的(5)式函數可擴增成下列多項式公式(7)式；

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}n^{m+1}+\frac{1}{2}n^m+\frac{P_1^m}{2\,!}\cdot\frac{1}{6}n^{m-1}+\frac{P_3^m}{4!}\cdot\frac{-1}{30}n^{m-3}+\frac{P_5^m}{6!}\cdot\frac{1}{42}n^{m-5}+\frac{P_7^m}{8\,!}\cdot\frac{-1}{30}n^{m-7}$$
$$+\frac{P_9^m}{10\,!}\cdot\frac{5}{66}n^{m-9}+\frac{P_{11}^m}{12\,!}\cdot\frac{-691}{2730}n^{m-11}+\frac{P_{13}^m}{14\,!}\cdot\frac{7}{6}n^{m-13}+\frac{P_{15}^m}{16\,!}\cdot\frac{-3617}{510}n^{m-15}$$
$$+\frac{P_{17}^m}{18\,!}\cdot\frac{43867}{798}n^{m-17}+\frac{P_{19}^m}{20\,!}\cdot\frac{-174611}{330}n^{m-19}+\frac{P_{21}^m}{22\,!}\cdot\frac{854513}{138}n^{m-21}$$

$$+\frac{P_{23}^{m}}{24\,!}\cdot\frac{-236364091}{2730}\cdot n^{m-23}\;+\frac{P_{25}^{m}}{26\,!}\cdot a_{m-25}\cdot n^{m-25}+\frac{P_{27}^{m}}{28\,!}\cdot a_{m-27}\cdot n^{m-27}\;+\;\cdots$$

$$+\frac{P_{2u-1}^{m}}{(2u)\,!}\cdot a_{m-(2u-1)}\cdot n^{m-(2u-1)}\;+\;\cdots+\frac{P_{m-3}^{m}}{(m-2)!}\cdot a_{3}\cdot n^{3}+\;\frac{P_{m-1}^{m}}{(m)!}\cdot a_{1}\cdot n \qquad (7)$$

u = 1、2、3、4、5、 …、11、12、 …、(m /2) − 1、(m /2) 等等連續正整數。

另一 *奇數類型* 的(6)式函數可擴增成下列多項式公式(8)式；

$$\sum_{k=1}^{n}k^{m}=\frac{1}{m+1}n^{m+1}+\frac{1}{2}n^{m}+\frac{1}{4}\cdot\frac{P_{1}^{m}}{P_{1}^{3}}n^{m-1}+\frac{-1}{12}\cdot\frac{P_{3}^{m}}{P_{3}^{5}}\;n^{m-3}+\frac{1}{12}\cdot\frac{P_{5}^{m}}{P_{5}^{7}}\;n^{m-5}+\frac{-3}{20}\cdot\frac{P_{7}^{m}}{P_{7}^{9}}\;n^{m-7}$$

$$+\frac{5}{12}\cdot\frac{P_{9}^{m}}{P_{9}^{11}}\;n^{m-9}+\frac{-691}{420}\cdot\frac{P_{11}^{m}}{P_{11}^{13}}\;n^{m-11}+\frac{35}{4}\cdot\frac{P_{13}^{m}}{P_{13}^{15}}\;n^{m-13}+\frac{-3617}{60}\cdot\frac{P_{15}^{m}}{P_{15}^{17}}\;n^{m-15}$$

$$+\frac{43867}{84}\cdot\frac{P_{17}^{m}}{P_{17}^{19}}\;n^{m-17}\;+\frac{-1222277}{220}\cdot\frac{P_{19}^{m}}{P_{19}^{21}}\;n^{m-19}+\frac{854513}{12}\cdot\frac{P_{21}^{m}}{P_{21}^{23}}\;n^{m-21}$$

$$+\frac{-1181820455}{1092}\cdot\frac{P_{23}^{m}}{P_{23}^{25}}\;n^{m-23}\;+a_{m-25}\cdot\frac{P_{25}^{m}}{P_{25}^{27}}\;n^{m-25}\;+\;a_{m-27}\cdot\frac{P_{27}^{m}}{P_{27}^{29}}\;n^{m-27}\;+\;\cdots$$

$$+a_{m-(2u-1)}\cdot\frac{P_{2u-1}^{m}}{P_{2u-1}^{2u+1}}\;n^{m-(2u-1)}\;+\;\cdots\;+\;a_{4}\cdot\frac{P_{m-4}^{m}}{P_{m-4}^{m-2}}\;n^{4}\;+\;a_{2}\cdot\frac{P_{m-2}^{m}}{P_{m-2}^{m}}\;n^{2} \qquad (8)$$

u = 1、2、3、4、 …、11、12、 …、(m −3)/2、(m −1)/2 等等連續正整數。

由(8)式得到與 m =24 公式同為 14 項數而成對的 m =25 者其 $\sum_{k=1}^{n}k^{25}$ 公式如下；

$$\sum_{k=1}^{n}k^{25}=\;\frac{1}{26}n^{26}+\frac{1}{2}n^{25}+\frac{25}{12}n^{24}+\frac{-115}{6}n^{22}\;+\frac{1265}{6}\;n^{20}\;+\frac{-24035}{12}\;n^{18}\;+\frac{185725}{12}\;n^{16}$$

$$+\frac{-25667195}{273}\;n^{14}\;+\frac{1300075}{3}\;n^{12}\;+\;\frac{-17386919}{12}\;n^{10}\;+\frac{277458775}{84}\;n^{8}$$

$$+\frac{-28112371}{6}\;n^{6}\;+\frac{21362825}{6}\;n^{4}\;+\;\frac{-1181820455}{1092}\;n^{2} \qquad \mathbf{(4.25)}$$

參、結論

以逐步型生成函數式描述前 N 個連續正整數等冪次和多項式各係數是本主題的一大亮點，全新思維創舉！將所有等冪次和的多項式型式歸類成 *偶數類型* 與 *奇數類型* 的兩大類型，並可逐次依順序一一增大 m 值而獲得更擴增的公式。像這樣的運作流程，可以清晰得到前 N 個連續正整數等冪次和公式的逐步型推演函數形式效果，實是令人信心堅定又欣慰的美事，也是自我發想的一件作品。

最大特徵是；每一 m 值 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 公式的最後一項係數值都可編寫成函數形式，以求取後續的所有公式中相同對應位置項的係數值。這個特徵是延續 $m+1$ 值後續每一明確公式無盡逐步運算的便捷關鍵。所有 m 值公式中成對的項數與各項數值型式恰好以(7)式及(8)式或仿效(E3).節逐步擴增運算形式即可表徵完全！

值得注意的是；被推導歸納出來的各位置項係數函數中的常數，其數值必與伯努力(Bernoulli)數有關連性的倍數關係！有趣的是本文僅應用到 均差運算、差分運算、待定係數法 與 牛頓插值多項式法，再將含有 m 的各位置項係數函數演化成排列記號數 P_i^m 的乘積式，就自然地得出與伯努力數有倍數關係的常數！

另一特質是；每一 m 值的 $\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n)$ 公式都有$(n+1)$的因式，使得 $f(-1)=0$，這性質促使偶數 m 的 a_2 係數值為 0 的運算過程大大地降低了計算的複雜度。

參考文獻

蔡聰明，兩個多項函數的插值公式， 數學傳播季刊 40 卷 1 期，pp. 16-30，2016 年 3 月。
李維昌，以遞迴關係式求 $\sum_{k=1}^{n} k^r$ 的公式解，數學傳播 44 卷 1 期，pp.94-96，2020 年 3 月。
李政豐，連續整數冪次和公式的另類思考，數學傳播 26 卷 2 期，pp.73-82，2002 年 6 月。
鍾承道，Bernoulli 多項式與連續冪次和探討，數學傳播 35 卷 2 期，pp.23-31，2011 年 6 月。
李輝濱，尋找含有組合數的級數和，科學教育月刊 44*期，2022 年*月。
笹部貞市郎編 數學大辭典 1982。 九章出版社。

【完】