

當藝術遇上藝數－紙摺蒙德里安方塊

李政憲¹ 游曉琦^{2*}

¹ 新北市立林口國民中學

² 臺中市立居仁國民中學

壹、前言

皮特·科內利斯·蒙德里安 (Piet Cornelies Mondrian, 1872 年 3 月 7 日－1944 年 2 月 1 日), 生於荷蘭, 逝於紐約。是風格派運動幕後藝術家和非具象繪畫的創始者之一, 對後代的建築、設計等影響很大。自稱其畫風為「新造型主義」, 又稱「幾何形體派」, 強調只運用最簡化、基礎的直線與矩形元素, 進行抽象藝術的創作。如下左圖 1「Composition in red,yellow,blue and black,1921」作品為其於法國時的創作, 使用了藍紅黃三原色與白、黑兩色, 而右圖 2「Composition No.10,1939-1942」為其於英國倫敦時的創作, 時值二次世界大戰將至, 其作品中的粗黑線象徵著牢籠, 呈現其失落的心情, 歡快的顏色也隨之減少 (註 1)。

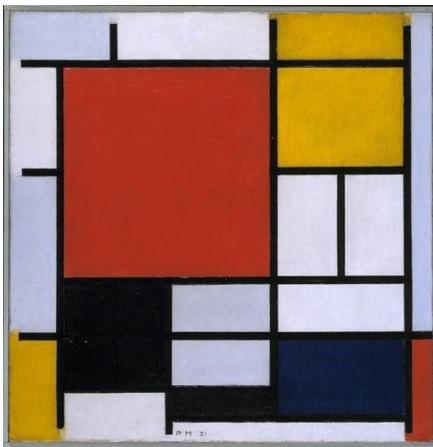


圖 1

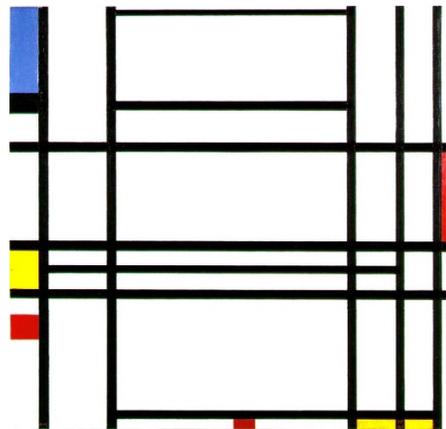


圖 2

而其畫風的轉變也其來有自, 如下圖 3 中即看的出同樣畫樹, 蒙德里安從具象到抽象、複雜到簡單的作品演進 (圖片引自註 2: 數感實驗室)。

本文將搭配摺紙, 將蒙德里安中的矩形元素, 透過摺正方形色紙與紙編的方式呈現其作品樣貌, 並討論於教學時可進行的提問與應用的數學概念, 以饗各位讀者。

*為本文通訊作者

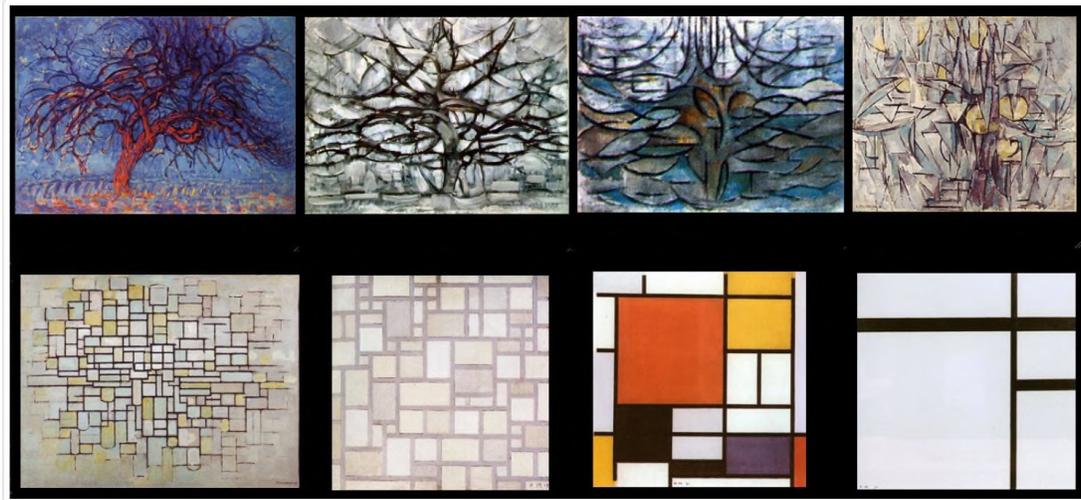


圖 3

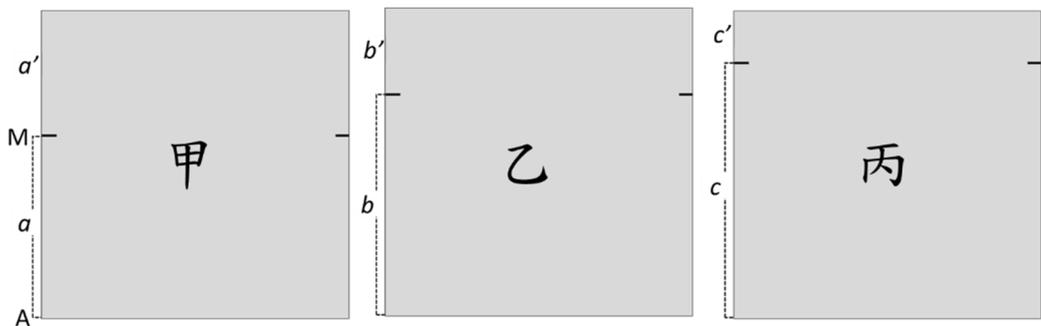
貳、紙摺蒙德里安方塊

參考網路上分享的蒙德里安方塊影片(註 3)，使用正方形色紙，製作 12 個零件再組合成彩色方塊。此方法需要 3 種規格的零件，建議使用 3 種不同顏色色紙製作此 3 種零件，每種零件 4 個(同種規格零件相同顏色)，其摺法說明如下。

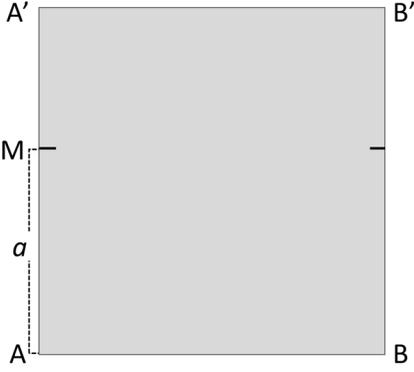
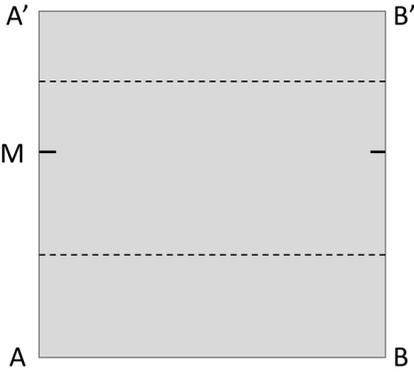
1. 材料：15cm 色紙 12 張(3 色，每色 4 張)
2. 零件摺製方式：

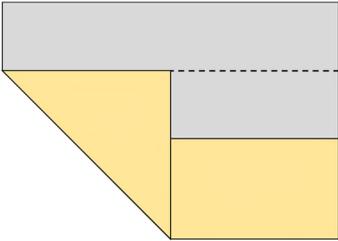
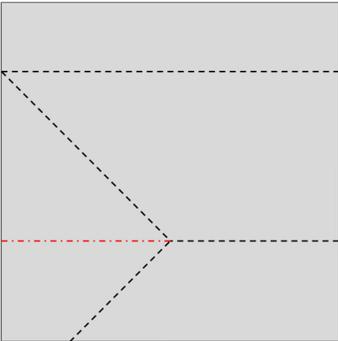
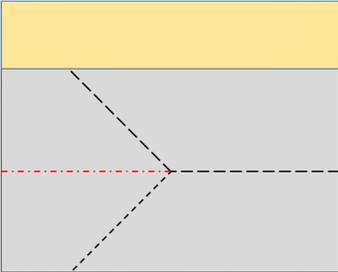
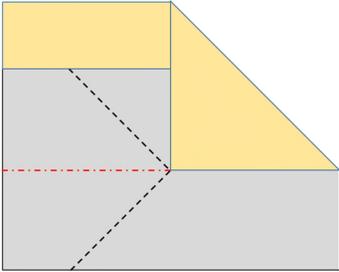
(1) 12 個零件的摺法完全相同，僅步驟一中 \overline{AM} 的長度不同。

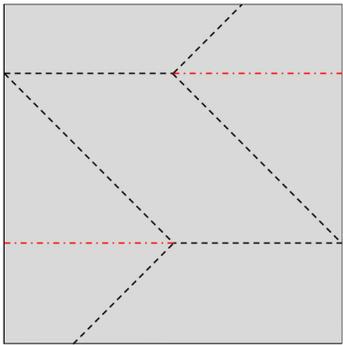
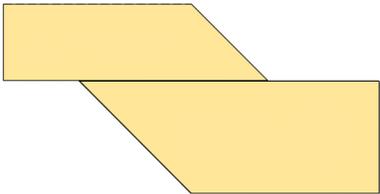
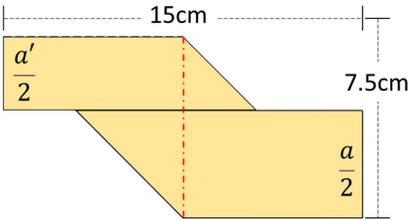
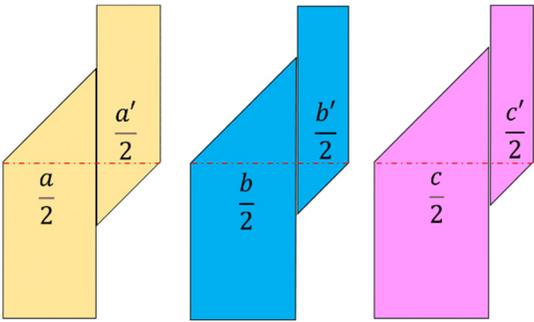
零件甲 $\overline{AM} = a$ ，零件乙 $\overline{AM} = b$ ，零件丙 $\overline{AM} = c$ ，如欲摺製出來的每個面矩形色塊邊長不同，則 a 、 b 、 c 取不同值即可。在此取 $c > b > a > \frac{1}{2}$ 邊長， $a + a' = b + b' = c + c' = 15\text{cm}$ (色紙邊長)。



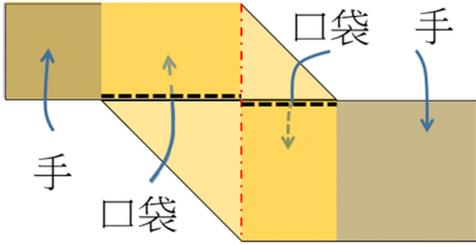
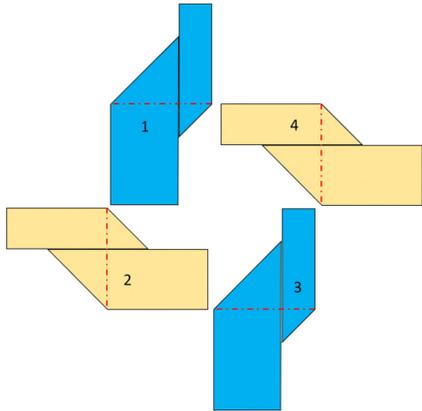
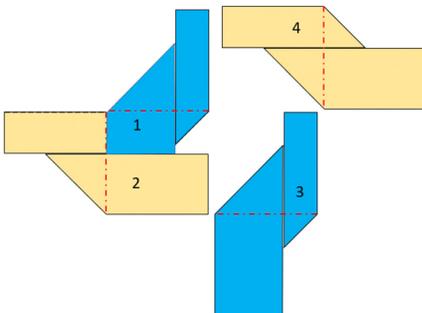
(2) 零件摺法

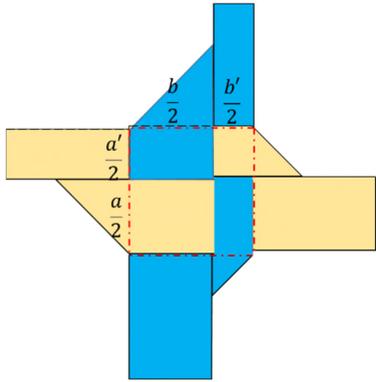
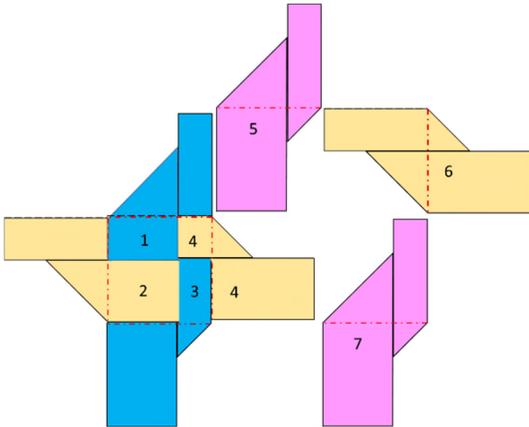
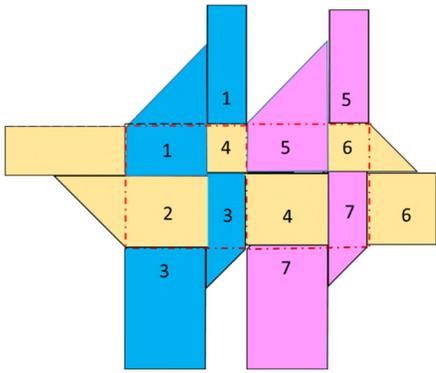
步驟	圖示	說明
一		<p>正方形色紙，正面朝下 在正方形邊上取$\overline{AM}=a$。</p>
二		<p>將 A 與 M 點重合，A' 與 M 點重合。</p>
		
三		<p>打開上方摺合處，將左下角貼齊摺痕，摺出等腰直角三角形。</p>

		
<p>四</p>		<p>----- 為谷線 -.-.-.- 為山線</p> <p>打開後，調整山谷線。</p>
<p>五</p>		<p>同步驟三，摺上半部。</p>
		

<p>六</p>		<p>完全打開，調整摺痕山谷線。</p>
<p>七</p>		<p>依山谷線摺痕，將紙張收合。</p>
<p>八</p>		<p>摺出圖中紅色山線，零件完成。其規格如圖所標示。</p>
<p>九</p>	 <p>甲 $\frac{a}{2}$ $\frac{a'}{2}$</p> <p>乙 $\frac{b}{2}$ $\frac{b'}{2}$</p> <p>丙 $\frac{c}{2}$ $\frac{c'}{2}$</p> <p>甲 X4 乙 x4 丙 x4</p>	<p>共需完成 3 色各 4 個零件。</p>

3. 組合方式

步驟	圖示	說明
一	 <p>The diagram shows a single component with a yellow body and a brown 'hand' section. A dashed line indicates where to separate the parts. Labels '口袋' (pocket) and '手' (hand) are present with arrows pointing to the respective parts.</p>	<p>每個零件在黑色虛線處可撐開一個空間，稱之為「口袋」；長方形前端(標示顏色較深處)，稱之為手。</p>
二	 <p>The diagram shows four numbered components (1, 2, 3, 4) arranged in a square pattern. Components 1 and 3 are blue, while 2 and 4 are yellow. Dashed lines indicate the 'pocket' and 'hand' areas for each.</p>	<p>將甲乙兩種零件各 2 個，以左圖方向放置，零件分別標示為 1、2、3、4 號。</p>
三	 <p>The diagram shows the four numbered components (1, 2, 3, 4) assembled into a square. The 'hand' of one component is inserted into the 'pocket' of another.</p>	<p>將 1 號零件的手，放入 2 號零件的口袋中。 再將 2 號零件的手，放入 3 號零件的口袋中； 將 3 號零件的手，放入 4 號零件的口袋中； 將 4 號零件的手，放入 1 號零件的口袋中。</p>

<p>四</p>		<p>四個零件可組合出一個正方形面(邊長為原色紙邊長的$\frac{1}{2}$)，由四個矩形色塊所構成。</p>
<p>五</p>		<p>加入 5、6、7 號三個零件 (將 5 號零件的手，放入 4 號零件的口袋中；將 6 號零件的手，放入 5 號零件的口袋中；將 7 號零件的手，放入 6 號零件的口袋中；將 4 號零件的手，放入 7 號零件的口袋中。</p>
<p>六</p>		<p>4、5、6、7 號四個零件可組合出第二個正方形面。兩個正方形面轉成垂直，將 1 號零件的手，放入 5 號零件的口袋中；將 7 號零件的手，放入 3 號零件的口袋中。可形成立方體互相垂直三面的大概框架。</p>

<p>七</p>		<p>加入 8、9 號兩個零件，即可完成第三個正方形面。</p>
<p>八</p>		<p>觀察每個面，加入適當零件，如左側面加入黃色甲零件(10 號)和粉色丙零件(11 號)。後方面加入藍色乙零件(12 號)；底面則有 3、7、11、12 號零件的另一部分。每面皆可由 4 個零件的「手插入口袋」形成一正方形面。依次完成各面，即完成作品。</p>

上述步驟是完成 3 色基本款的蒙德里安方塊。當你理解它的組合方法時，也可將某些零件換成不同顏色，下圖 4 則分別是 3 色、5 色、6 色的蒙德里安方塊，當然也可嘗試更多不同的顏色組合方式。

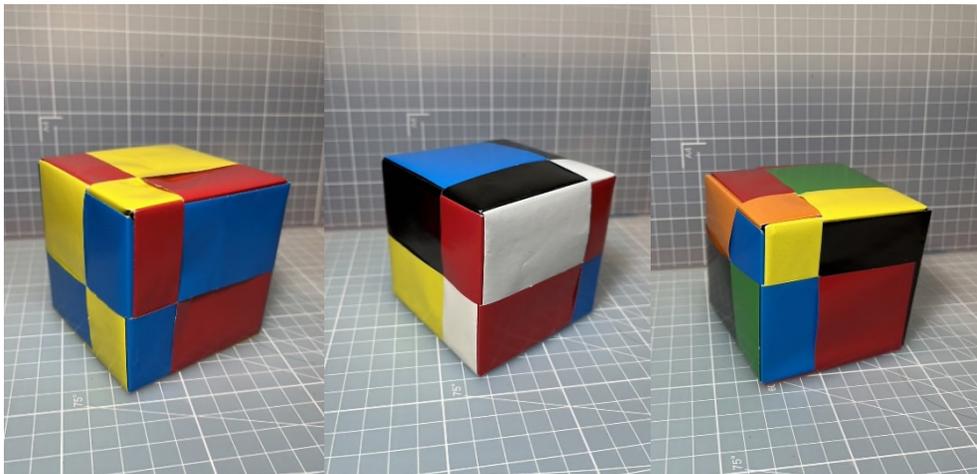


圖 4

參、紙編蒙德里安方塊

透過使用三張不同顏色 1:5 的紙條，以紙編方塊的方式(註 4)，可做出對面顏色相同的三色方塊，如下圖 5。進一步思考是否可用此編織的方式，做出像蒙德里安方塊的效果呢?我們做了以下嘗試，將原本紙編方塊的紙條切開，再以類似的方法交錯編織，則可做成每一面分割成四個矩形的 3 色基本款蒙德里安方塊，如圖 6。

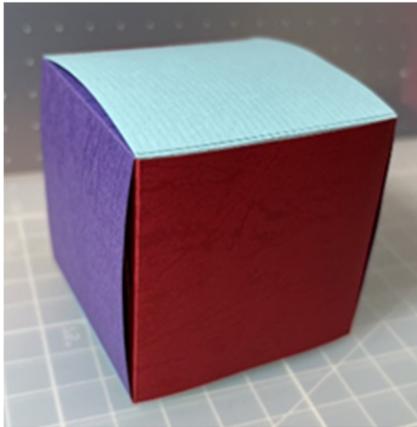


圖 5



圖 6

紙編方塊操作方法說明如下：

1. 紙條切割

將原本 1:5 的三張紙條(如圖 7 左)做適當的切割(如圖 7 右),其中 $a+a'=b+b'=c+c'=$ 紙條寬即可。

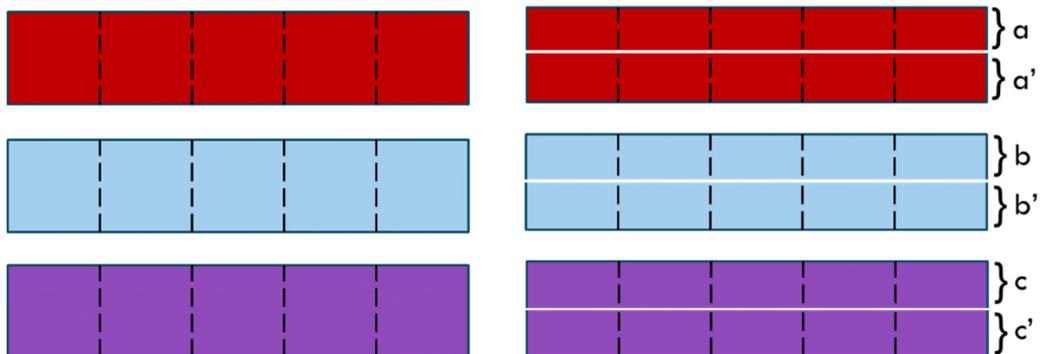
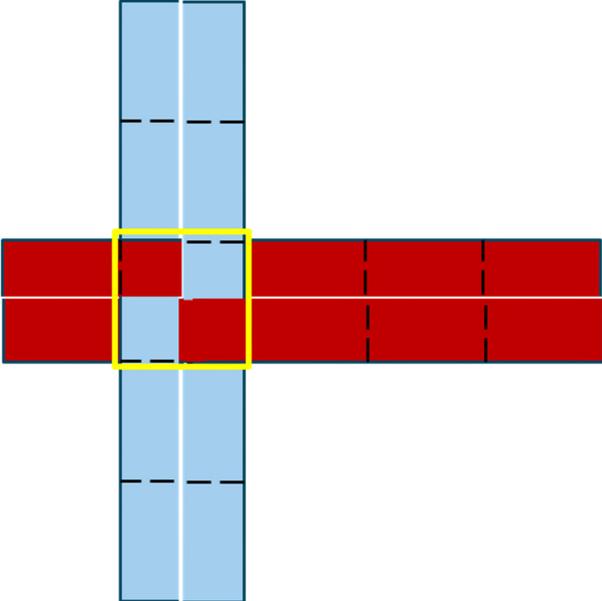
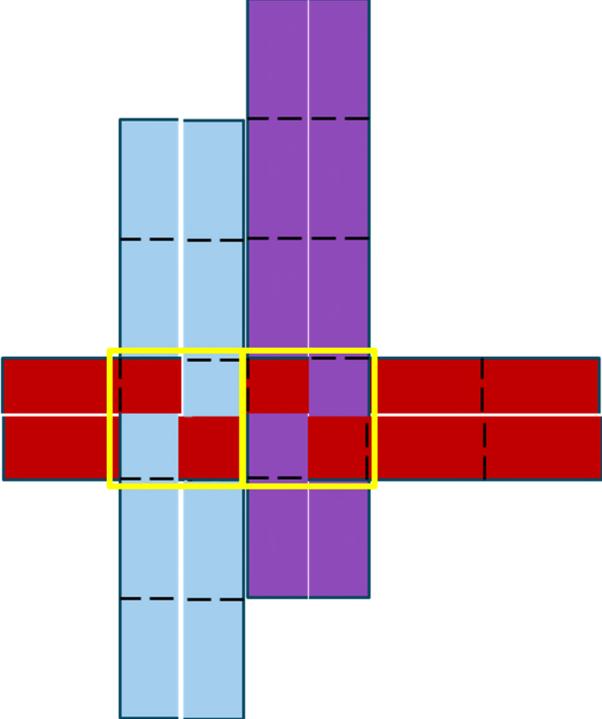
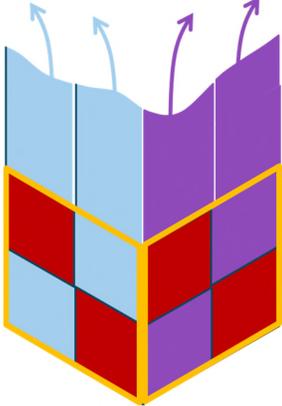
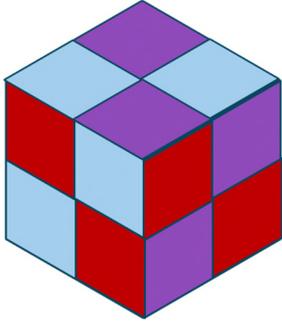


圖 7

2. 編織方塊

步驟	圖示	說明
一		<p>將兩張紙條垂直放置，相疊合(圖中黃色框線)的部分，切開的紙條要上下交錯，如左圖。</p>
二		<p>加入第三張紙條(紫色)，與紅紙條相疊合的部分，切開的紙條上下交錯，如左圖。</p>

<p>三</p>		<p>將兩個黃框區域的正方形轉成互相垂直的面，下方的紙條向內摺至底面，此時方塊已有兩面完成。</p>
<p>四</p>		<p>再將上方的藍色和紫色紙條交錯編織，即可完成第三面。</p>
<p>五</p>	<p>再依序完成每一面，紙編蒙德里安方塊即完成。</p>	

如將紙條分切方式改變、同一紙條的顏色做變化，則可製作出不同色塊交錯的方塊。圖 8 中，將第一張紙條切成 2 小條，顏色不變；第二張紙條切成 3 小條，並將顏色換成黑色-藍色-黑色；第三張紙條切成兩小條，但是將顏色換成 1 小條白，一小條黃色。用同樣的方式交錯編織做成立方體，就形成不一樣的樣貌。雖然用此方法，尚未能真正達到蒙德里安色塊分布的方式，但是以此方式製作出彩色的方塊，可以讓每一面的色塊數量改變，也是很有趣的嘗試。

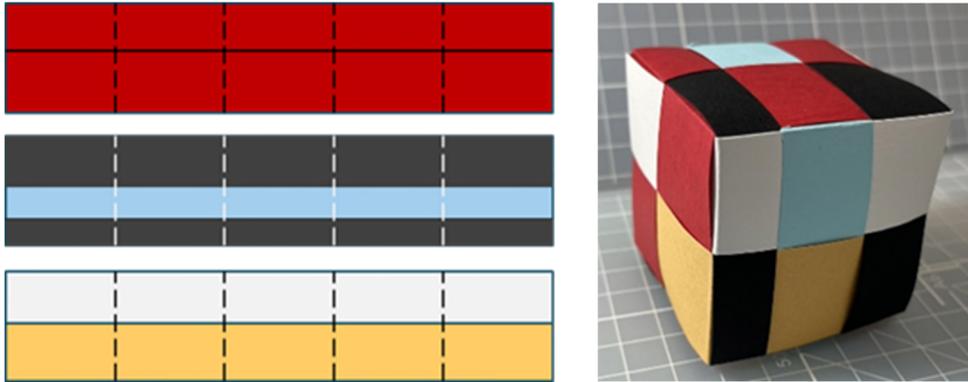


圖 8

肆、相關數學延伸

前面紙摺蒙德里安方塊時，使用甲乙丙三種零件(圖 9)組合出來的正方形面，其色塊分割情形如圖 10，此視角所見的三面 12 個色塊形狀各異。如果取 $a = b = c$ ，則每一面的色塊分割情形都會相同，為兩個正方形和兩個長方形，如圖 11 所示。所以摺製零件時，可依外觀色塊的考量，選取所需的 a 、 b 、 c 之值。

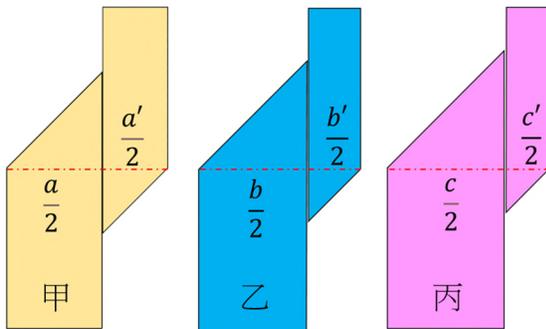


圖 9

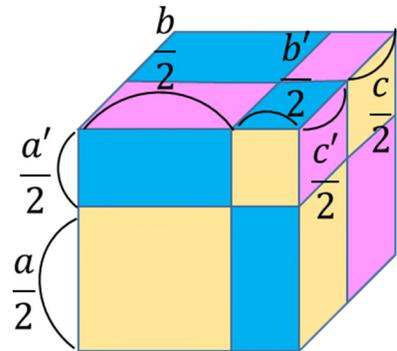


圖 10

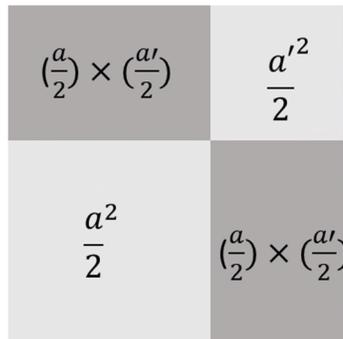


圖 11

八年級上學期數學課程會學到乘法公式，本文中討論的方塊，每個面色塊分割的情況，恰為乘法公式之基本型 $(x + y)(z + w) = xz + xw + yz + yw$ 的圖形呈現（如下圖 12），因為完成的作品其每個面都是正方形，明顯得知 $x + y = z + w$ ，如果取 $x = z$ 時，自然可推得 $y = w$ ，得到這個面就是完全平方和 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 的幾何示意圖（如圖 13）。因此教師於教學時，也可藉由取不同的 a 、 b 、 c 值，和學生討論表面的色塊分割有幾種矩形和多少個正方形，以及每一種顏色色塊的面積大小關係。

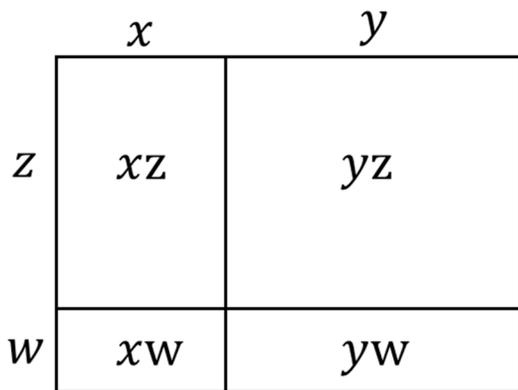


圖 12

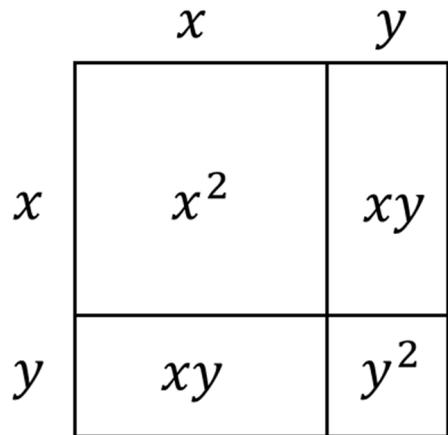


圖 13

而無論用的是什麼方法，還可以進一步討論其配色的方式，若要造成同色不相鄰，最少與最多分別為幾種顏色？以及各有幾種不同的配色方式？以紙編方塊為例，步驟二使用了三種不同顏色，就是同色不相鄰的最少顏色了。至於為什麼是三種，恰與正方體每個頂點接三個面的特性有關，因為需要共頂點的三個面都不同色，所以最少需要三種顏色。而若我們將切割後的紙條更換為不同顏色，就可以製作六色不同的紙編方塊，進一步再討論這六種顏色的排列組合方式；若將其中幾張長方形紙條，切割為三條以上的長方形（如圖 8），其組合數就更多了。

最後還可以再討論的是本文中討論的兩種作法，都是完成正立方體的作品，是否有機會用兩種方式分別完成蒙德里安長方體，也可以試著改變直線的切割方式（如圖 14）？完成的過程中又有什麼需要注意的要求呢？這個部份就有待各位讀者試者挑戰看看，也歡迎分享您的創作與心得，與我們一起呈現這個藝術與數學兼具的作品。（註 5）

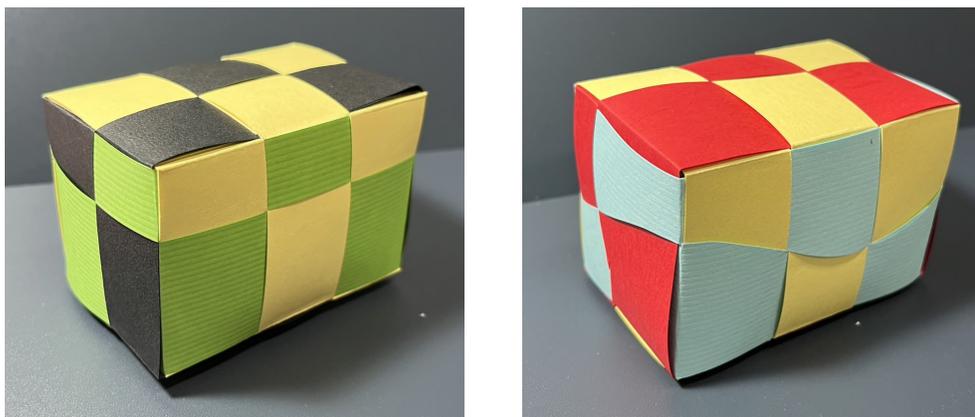


圖 14

伍、結語

本文從蒙德里安的生平與作品談起，透過其幾何形體的抽象創作，將重點鎖定在矩形切割的呈現，進一步透過色紙摺製與紙編，以兩種方式完成紙摺蒙德里安方塊，並且探索其數學結構，討論可以應用於教學上的切入點有哪些。事實上，由於蒙德里安作品的矩形結構，還有其他與數學概念及遊戲的連結，有興趣的朋友不妨可以自行上網研究一下(註 3)，或是有機會再跟各位讀者分享了。

註釋：

註 1：參考資料：YOUTUBE 影片-藝術大師的故事 蒙德里安 Mondrian：

<https://www.youtube.com/watch?v=ezLcHDQQxD4>

註 2：圖片來源：數感實驗室-極簡後的抽象：蒙德里安的謎題（留言處）

<https://reurl.cc/r6dXyN>

註 3：Mondrian Cube：Cubo Mondrian -Modular Origami

<https://www.youtube.com/watch?v=OyATjAQuZb0>

註 4：Weave a Cube I(<https://www.cutoutfoldup.com/812-weave-a-cube-i.php>)

註 5：蒙德里安的原作，矩形色塊間的線條多以粗黑線作間隔（如圖 1、圖 2），建議各位讀者完成的作品矩形周圍，可以黑色簽字筆繪製粗黑線條（如圖 11），會更有蒙德里安原作的味道。

註 6：可先參考「環遊數界」網站中的「蒙德里安謎題」：

<https://amathing.world/mondrian-puzzle/>