

# 無頻寬限制的熱雜訊之自相關函數的介紹 及其數學推導

林福林<sup>1\*</sup> 林子喬<sup>2</sup>

<sup>1</sup>南台科技大學

<sup>2</sup>聯發科技

電子通訊在本文簡稱通訊，它是利用電子電路做資訊的傳輸、接收及處理。資訊也稱為消息，原始資訊可以是類比式或數位式，目前的技術皆是轉成 0 或 1 的二元碼，經由通訊系統以電磁能的型態來傳送。

資訊理論 (information theory) 是通訊的最根本理論，涉及消息的量化、儲存和通訊等。資訊理論可以說是夏農(Shannon)獨自發明的一門重要的傳輸科學，可應用於電腦、國際網路及數位媒體。夏農建立了新的知識領域，包括提出正確的問題，證明其中多數定理並提出問題的解答[1, p18]。

夏農的通道編碼定理(channel coding theorem)比較簡單的說明如下[2, p591]：考慮一個離散無記憶資訊源(discrete memoryless source)及離散無記憶通道(discrete memoryless channel)，只要消息傳送的速率小於等於通道容量(channel capacity)，則存在一種編碼技術可使傳送出去的資訊經過通道後的錯誤率可以任意的小。換句話說，就算有雜訊干擾，經由通訊過程仍可正確的接收，這是非常令人驚訝的定理。

夏農接著考慮頻寬有限(band-limited)，功率有限(power-limited)的加成性白色高斯通道(additive white Gaussian channel)，加成性指的是通道內的雜訊是以相加的方式干擾接收訊號，白色指的是雜訊的功率頻譜密度(power spectral density)是常數，高斯通道指的是雜訊的電壓分布是高斯分布，幾乎所有的實際通道都是高斯通道，這也是中央極限定理(central limit theorem)的一個自然的結果。經由複雜的推導，夏農提出資訊容量定理(information capacity theorem)，說明如下：考慮一個頻寬  $B(\text{Hz})$  的通道，接收訊號平均功

率  $P(\text{Watt})$ ，雙邊雜訊功率頻譜密度為  $S_w(f) = \frac{N_0}{2} \left( \frac{\text{Watt}}{\text{Hz}} \right)$ ，其通道容量(單位是位元/秒，bit/s)可以表示為[2, p599]

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_0 B} \right) \quad (1)$$

---

\*為本文通訊作者

上文提到的通道內的雜訊也稱為熱雜訊(thermal noise)，它是來自導體或半導體中電荷載子的隨機運動，與材料特性無直接關聯。熱雜訊在數位通訊系統效能分析中佔有重要因素，由(1)式也可以看出當熱雜訊的功率頻譜密度愈大，通道容量就會下降，傳輸速率的上限就會跟著下降。

熱雜訊的物理解釋是載子(或是電子)以一定的任意移動而形成熱平衡，此任意移動與布朗發現的花粉粒子在水中的運動類似，因此也稱為布朗雜訊 (Brownian noise) [3, p47-48]，由於移動是朝任意的方向且數量很大，因此根據中央極限定理，所產生的電壓會是一種高斯隨機程序(Gaussian random process)且期望值(直流電壓)為 0 伏特。

此任意移動也會產生交流的成分，由於通訊理論的教科書習慣把特性阻抗(characteristic impedance)當成  $1\Omega$ ，所以在阻抗匹配的情況下，此交流電壓的變異數(variance)剛好就是熱雜訊的平均功率。如果討論的對象是射頻(radio frequency, RF)工程師，則全世界的無線通訊射頻系統之特性阻抗皆是  $50\Omega$ ，例如你手上的 5G 手機，這時交流電壓的變異數與平均功率只是差了一個常數而已。

一般來說，通訊接收機在阻抗匹配的情況下，根據量子力學，熱雜訊的可用功率頻譜密度(available power spectral density)可以表示為 [4, p60]

$$S_{QN}(f) = \frac{1}{2} \left[ \frac{h |f|}{e^{hf/kT} - 1} \right], \quad -\infty < f < \infty \quad (2)$$

其中  $h = 6.6254 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  為普朗克常數， $T$  為絕對溫度，單位  $K$ ，對應到接收機的等效雜訊溫度(equivalent noise temperature)， $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  為波茲曼常數， $f$  為頻率，單位  $\text{Hz}$ 。(2)式也顯示了物質在絕對零度以上，其原子能階上一定會有隨機擾動。

通常全世界的通訊工程師都有一個默契，即統一定義室溫為  $T_0 = 290K$  [4, p60]。接收系統從接收天線到解調之前各種雜訊的總和等效的結果可以表示成雜訊指數(noise figure, NF)，數值越大表示雜訊越多，射頻工程師可以透過複雜且昂貴的設計來降低雜訊指數。

假設接收系統的雜訊指數  $NF = 10\text{dB}$ ，相當於  $T = 2900^\circ K$ ，圖 1 顯示了當  $T = 2900^\circ K$  時熱雜訊的雙邊(含正負頻率)功率頻譜密度，為了畫圖的方便，橫軸標示的刻度是  $\log(f)$ ，所以  $\log(f) = 12$  表示  $f = 10^{12} \text{ Hz} = 1000\text{GHz}$ 。目前無線通訊的工作頻率不會超過 500

GHz，此時(2)式可以近似簡化為  $S_w(f) = \frac{kT}{2} = \frac{N_0}{2}$ ，從圖 1 可以看出在 500 GHz 以內幾

乎為常數函數，就像白光是由各種頻率的單色光混合而成，在無線通訊的領域中也稱此熱雜訊為白色雜訊(white noise)。白色雜訊的近似簡化可以由泰勒展開，利用

$\lim_{x \rightarrow 0} [e^x - 1] = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots - 1] = x$  及低頻近似得到，推導如下：

$$\lim_{f \rightarrow 0} S_{QN}(f) = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \right] = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \frac{hf}{(1 + \frac{hf}{kT} - 1)} \right] = \frac{kT}{2} \quad (3)$$

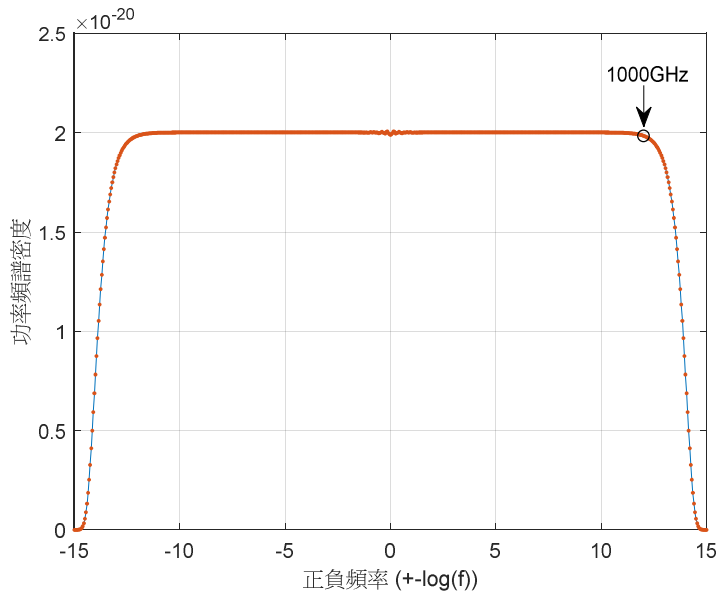


圖 1：熱雜訊的雙邊功率頻譜密度函數(橫軸為頻率)

熱雜訊可以合理的假設成廣義穩態的 (wide-sense stationary, WSS) 隨機程序，假設熱雜訊的電壓以隨機程序  $X(t)$  表示，廣義穩態包含兩件事[2, p36]：(1)對所有時間  $t$  而言，一階的統計特性期望值是常數，即  $E[X(t)] = \mu_X$ ，與  $t$  無關；(2) 二階的統計特性自相關函數 (autocorrelation function)  $E[X(t_1)X(t_2)] = R_X(t_2 - t_1)$  只與取樣時間間隔  $\tau = t_2 - t_1$  有關，與絕對的  $t_1$  及  $t_2$  無關，自相關函數可以改寫成  $R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)]$ 。根據溫納-凱群定理 (Wiener-Khinchine theorem) [2, p46]，廣義穩態的隨機程序其功率頻譜密度與自相關函數互為傅立葉轉換對 (Fourier-transform pair)。假設高斯雜訊為白色的，即

$$S_w(f) = \frac{kT}{2} = \frac{N_0}{2} \text{ 成立，可以得到 [2, p61]}$$

$$R_w(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_w(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (4)$$

其中  $j = \sqrt{-1}$  為單位虛數， $\delta(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \neq 0 \\ \infty & \tau = 0 \end{cases}$ ，也稱作脈衝函數(impulse function)，

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$ 。(4)式告訴我們不管白色雜訊取樣的時間是多小，其自相關函數皆為 0，也稱作不相關(uncorrelation)。由於熱雜訊是高斯分布，因此也可以推得熱雜訊的取樣結果是統計獨立的(statistically independent)。到目前為止，假設熱雜訊是白色的在無線射頻通訊的領域都適用。

在數位通訊系統的討論中，通道的有效頻寬是有限值。舉例來說，圖 2 為理想的矩形帶通白色雜訊的一個樣本函數(sample function)，其功率頻譜密度如圖 3 所示，帶通寬度為  $2B$  Hz，中心頻率為  $\pm f_c$  Hz，高度為  $\frac{N_0}{2}$  Watt / Hz，數學式可用下式表示[2, p65]：

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2} [\Pi(\frac{f + f_c}{2B}) + \Pi(\frac{f - f_c}{2B})] \quad (5)$$

其中  $\Pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ ，也稱作矩形函數(rectangular function)。對(5)式沿著頻

率軸做積分可以得到平均功率  $P_N = 2N_0B$ 。

對(5)式作反傅立葉轉換可以得到自相關函數[2, p66]

$$R_N(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df = 2N_0B \cdot \text{Sinc}(2B\tau) \cos(2\pi f_c\tau) \quad (6)$$

其中  $\text{Sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ ，也稱作辛克函數(sinc function)，畫圖結果如圖 4 所示。將(6)

式中的  $\tau$  代 0 一樣可以得到平均功率  $P_N = R_N(0) = 2N_0B$ 。

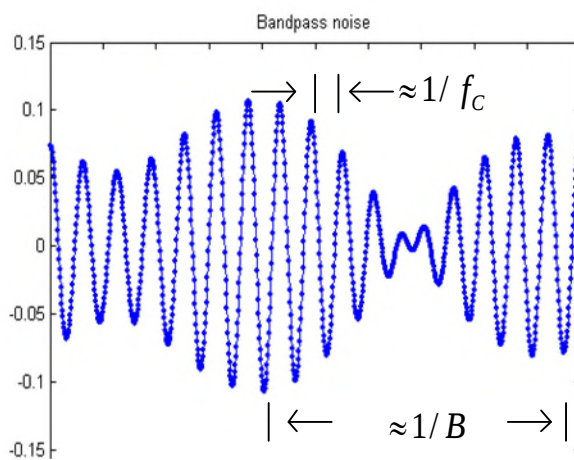


圖 2：理想的矩形帶通白色雜訊的一個樣本函數(橫軸為時間，縱軸為電壓)

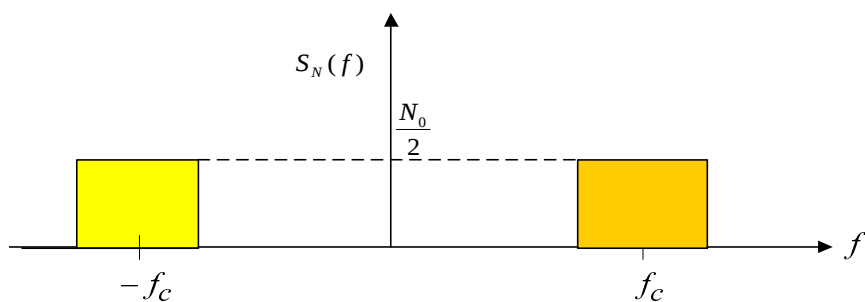


圖 3：理想的矩形帶通白色雜訊的功率頻譜密度(橫軸為頻率，縱軸為功率頻譜密度)

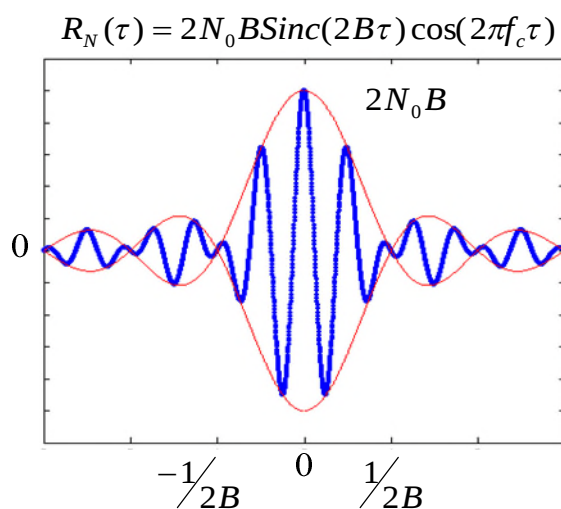


圖 4：矩形帶通白色雜訊的自相關函數(橫軸為兩點的取樣時間差，縱軸為自相關函數值)

在此我們提出兩個極端的假設性問題：(1)如果熱雜訊沒有頻寬的限制，且不做白色雜訊的近似，請問其平均功率為何？(2) 請問其自相關函數為何？最後希望可以使用 Matlab 畫出對應的相關係數圖形，並且粗略的估計當取樣間隔分別是多少可以得到相關係數  $\rho = 0.5$  及  $\rho = 0.1$ 。計算過程如下：

(1) 平均功率的計算通常有兩種方法，如果我們知道功率頻譜密度，則沿著頻率軸做積分即可得到平均功率。如果我們知道自相關函數  $R(\tau)$ ，則把取樣時間間隔  $\tau$  代 0 即可。

設  $x = hf / kT$  並且利用  $\int_0^\infty \left[ \frac{x}{e^x - 1} \right] dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ，沿著頻率軸做積分得到

$$\begin{aligned} P_{QN} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{QN}(f) df = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{h |f|}{e^{hf/kT} - 1} \right] df = \int_0^{\infty} \left[ \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \right] df \\ &= \frac{(kT)^2}{h} \int_0^{\infty} \left[ \frac{x}{e^x - 1} \right] dx = \frac{\pi^2 (kT)^2}{6h} \end{aligned} \quad (7)$$

$P_{QN} = \frac{\pi^2 (kT)^2}{6h}$  即是沒有頻寬限制且不做白色假設的熱雜訊之平均功率，至目前為止

因為沒有實際用途，文獻上也沒有人會真的去推導，純粹只是好奇心使然才做這樣的計算。

假設  $T = T_0 = 290^\circ K$ ，結果大約是  $39.76 \text{ nW}$  或是  $-44 \text{ dBm}$ 。dBm 是通訊工程師習慣採用的單位，以  $1 \text{ mW}$  為基準，取以 10 為底的對數(log)運算再乘上 10 可得。

(2) 利用功率頻譜密度的反傅立葉轉換可以得到自相關函數

$$\begin{aligned} R_{QN}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{QN}(f) e^{j2\pi f\tau} df = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[ \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \right] e^{j2\pi f\tau} df + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \left[ \frac{-hf}{e^{-hf/kT} - 1} \right] e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[ \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \right] e^{j2\pi f\tau} df + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[ \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \right] e^{-j2\pi f\tau} df = R_+(\tau) + R_+(-\tau) \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned}
R_+(\tau) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \right] e^{j2\pi f\tau} df = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{hf}{1 - e^{-hf/kT}} \right] e^{-hf/kT} e^{j2\pi f\tau} df \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty h f e^{-(nh/kT - j2\pi\tau)f} df = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\left(\frac{nh}{kT} - j2\pi\tau\right)^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

代回(8)式得到

$$\begin{aligned}
R_{QN}(\tau) &= R_+(\tau) + R_+(-\tau) = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^\infty \left[ \frac{1}{\left(\frac{nh}{kT} - j2\pi\tau\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{nh}{kT} + j2\pi\tau\right)^2} \right] \\
&= h \sum_{n=1}^\infty \frac{\left(\frac{nh}{kT}\right)^2 - (2\pi\tau)^2}{\left[\left(\frac{nh}{kT}\right)^2 + (2\pi\tau)^2\right]^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

(10)式目前尚未在文獻中出現，為了判斷(10)式可能是對的，我們利用平均功率的等式  $P_{QN} = \int_{-\infty}^\infty S_{QN}(f)df = R_{QN}(0)$  來檢查，

$$R_{QN}(0) = h \sum_{n=1}^\infty \frac{\left(\frac{nh}{kT}\right)^2 - 0^2}{\left[\left(\frac{nh}{kT}\right)^2 + 0^2\right]^2} = \frac{(kT)^2}{h} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2 (kT)^2}{6h} = P_{QN} \tag{11}$$

結果確實與(7)式相符。

(3) 經由 Matlab 程式的幫助將(10)式自相關函數做歸一化處理，由於自相關函數的最大值一定出現在  $\tau = 0$  的地方，我們定義相關係數(correlation coefficient)  $\rho(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)}$ ，可知

相關係數範圍為  $-1 \leq \rho \leq 1$ 。沒有頻寬的限制且不做白色近似的熱雜訊，其相關係數畫出如圖 5 所示，粗略的估計當取樣間隔  $\tau = 0.0163 \text{ psec}$ ，其相關係數約為  $\rho = 0.5$ ，當取樣間隔  $\tau = 0.0429 \text{ psec}$ ，其相關係數約為  $\rho = 0.1$ 。只有在很低的相關係數條件下，我們才能宣稱取樣的熱雜訊電壓是統計獨立的高斯隨機程序，因此在未來當傳輸速率需求越來越高，那些在白色的假設之下推得的結果將需要做修正。

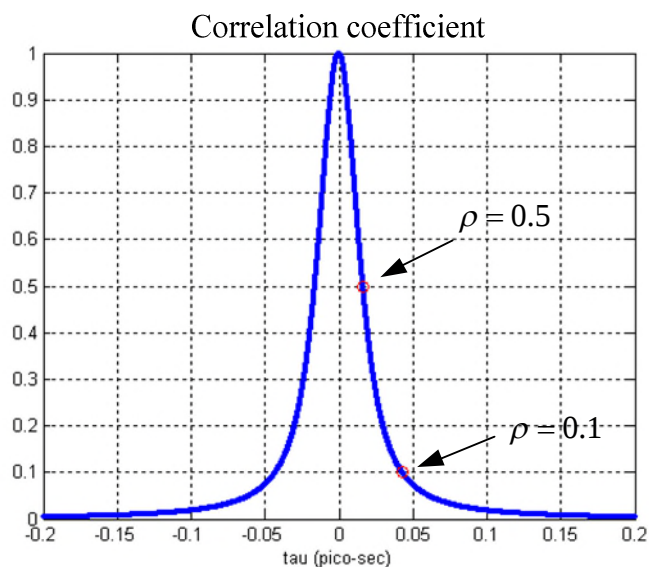


圖 5：無頻寬限制的熱雜訊之相關係數函數

最後做個結論，通訊的傳輸速率需求越來越高，所需傳輸頻寬也越來越大，無線傳輸的載波頻率也朝著更高的頻率發展，白色雜訊假設的極限也許在不久的將來就會到達，因此提出此文給未來的無線通訊工程師及相關教學的老師參考。

## 參考文獻

- [1] 李建興譯(2008)：天才數學家的秘密賭局。台北市：皇冠。
- [2] Haykin, S. (2001). *Communication systems* (4nd ed.). New York: John Wiley & Sons .
- [3] 呂文嘉等譯(1995)：通信電子學。台北市：高立。
- [4] 林福林(2020)：探討接收系統等效雜訊底層-26 招功夫逐步破解雜訊指數。新通訊元件雜誌，10 月，p60-71。