從「兩個求邊長比問題內在的共通性」談起

連威翔

Uber Eats 外送合作夥伴

壹、前言

在高中數學學科電子報第143期名為《一對奇特的比例式：由外心面積比逆求三角形邊長比》的文章[1]中，作者證明了底下的性質：

性質 1：設 ΔABC 為銳角三角形，外心為 O。令 $a=\overline{BC}, b=\overline{CA}, c=\overline{AB}$，且令

$$\Delta OBC:\Delta OCA:\Delta OAB=p:q:r,$$

其中 p,q,r 皆大於0，則有

$$a:b:c=\sqrt{p(q+r-p)}:\sqrt{q(r+p-q)}:\sqrt{r(p+q-r)}. \tag{1}$$

請參考下圖，其中 $\overline{OD},\overline{OE},\overline{OF}$ 為 ΔABC 三邊的中垂線。

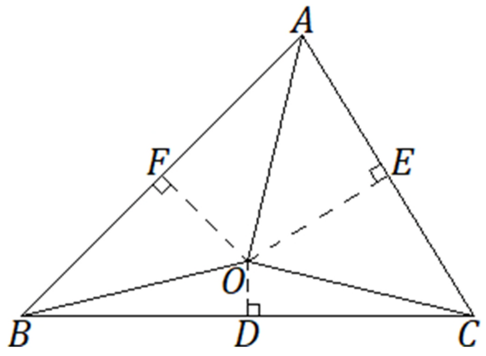

圖 1

套用[1]文作者的說法，性質 1 的用處在於「由外心與三頂點連線將三角形所分成的面積比，倒過來求原來三角形三邊長的比」。在[1]文第貳節的第三部分，作者表示其實在他證明性質 1 的過程中也順便證明了底下的性質：

性質 2：設 p,q,r,x,y,z 皆為非零實數，若

$$p:q:r=x(y+z-x):y(z+x-y):z(x+y-z), \tag{2}$$

則

$$x:y:z=p(q+r-p):q(r+p-q):r(p+q-r). \tag{3}$$

注意[1]文作者將(2),(3)兩式稱為「一對奇特的比例式」，並以此作為[1]文的標題。見到性質 2 後，筆者覺得相當新奇，也因此設法找出了性質 2 的另證。

另一方面，在[1]文中作者發表性質 1 的證明之後，接著在高中數學學科電子報第148期發表另一篇名為《由垂心面積比逆求三角形邊長比》的[2]文，文中利用上述性質 2 搭配「垂心面積比的邊長公式」(詳見[2]文)介紹了下述性質的證明：

性質 3：設 ΔABC 為銳角三角形，垂心為 H。令 $a=\overline{BC}, b=\overline{CA}, c=\overline{AB}$，且令

$$\Delta HBC:\Delta HCA:\Delta HAB = P:Q:R,$$

其中 P,Q,R 皆大於0，則有

$$a:b:c=\sqrt{P(Q+R)}:\sqrt{Q(R+P)}:\sqrt{R(P+Q)}. \tag{4}$$

請參考下圖，其中 $\overline{AI},\overline{BJ},\overline{CK}$ 為 ΔABC 的三邊上的高。

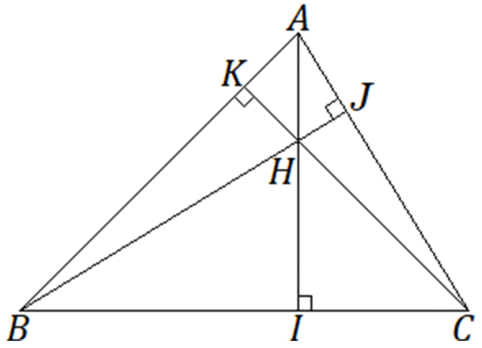

圖2

筆者猜測，因為先後發表了[1],[2]文的作者使用了在[1]文性質 1 的證明過程中所發現的性質 2 來證明[2]文中的性質 3，所以在[2]文前言的最後一段，作者表示他寫作[2]文的目的在於「揭示垂心和外心面積比逆求邊長比問題內在的共通性」，即揭示性質 1 與性質 3 內在的共通性。因為注意到這段話，筆者也對此「內在的共通性」進行了一些研究，發現其中的關鍵在於證明上述性質 1 的面積比 $p:q:r$ 與性質 3 中的面積比 $P:Q:R$ 中的六個非零數 p,q,r,P,Q,R 所滿足的一個比例式。除此之外，筆者也研究了上述的性質 2，並找到兩種不同的證明方式。

在底下第二節中，筆者將介紹自己研究上述「兩個求邊長比問題內在之共通性」後所得的結果；接著在第三節中，則將對性質 2 提出兩個證明與一些相關探討供讀者參考。

貳、兩個求邊長比問題內在的共通性

在[3]文第二節第一部份的後段，作者劉俊傑老師證明了下述公式：

公式 1：設 O為銳角 ΔABC 的外心，則

$$\begin{aligned}&\Delta OBC:\Delta OCA:\Delta OAB\\&=a^2(b^2+c^2-a^2):b^2(c^2+a^2-b^2):c^2(a^2+b^2-c^2).\end{aligned}\tag{5}$$

而發表日期在[3]文之後的[1]文中，作者陳建燁老師也介紹了公式 1，但兩篇文章對公式 1 之結論的寫法有一些差異，此處筆者是採用[1]文的寫法來介紹上述公式。

另一方面，劉老師於[3]文第二節一開始介紹了底下公式的證明：

公式 2：設 H 為銳角 ΔABC 的垂心，則

$$\begin{aligned}&\Delta HBC:\Delta HCA:\Delta HAB\\&=(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4):(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4):(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4).\end{aligned}\tag{6}$$

而發表日期在[3]文之後的[2]文中，作者陳建燁老師也介紹了公式 2，但兩篇文章對公式 2 之結論的寫法有一些差異，此處筆者是採用[2]文的寫法來介紹上述公式。

陳老師在[3]文中將公式 2 稱作「垂心面積比的邊長公式」，按照這樣的命名方式，公式 1 應可稱為「外心面積比的邊長公式」。比較公式 1 與公式 2，可發現兩者的探討方向類似，只是前者是針對外心，而後者是針對垂心。注意(6)式可改寫為

$$\begin{aligned}&\Delta HBC:\Delta HCA:\Delta HAB\\&=(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2):(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2):(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2).\end{aligned}\tag{7}$$

介紹完上面的公式 1 與公式 2 之後，接下來我們看下述性質：

性質 4：設 O,H 分別為銳角 ΔABC 的外心與垂心，令

$$\Delta OBC:\Delta OCA:\Delta OAB=p:q:r,\tag{8}$$

$$\Delta HBC:\Delta HCA:\Delta HAB=P:Q:R,\tag{9}$$

其中 p,q,r,P,Q,R 均為正數，則

$$p:q:r=(Q+R):(R+P):(P+Q).\tag{10}$$

且上式等價於

$$P:Q:R=(q+r-p):(r+p-q):(p+q-r). \tag{11}$$

筆者發現，只要先證明性質 4，即可利用它來證明第一節中的性質 1 與性質 3 等價，如此即可說明性質 1 與性質 3 這兩個由面積比逆求邊長比問題「內在的共通性」。在已知性質 4 成立的條件下，請讀者參考底下性質 1 與性質 3 等價的證明：

證明：若性質4成立，則可利用(10)式假設

$$p=(Q+R)s, \qquad q=(R+P)s, \qquad r=(P+Q)s,$$

其中 $s>0$，利用第一節性質 1「由外心面積比逆求邊長比公式」的結論(即(1)式)，可寫下

$$\begin{aligned}
&a:b:c=\sqrt{p(q+r-p)}:\sqrt{q(r+p-q)}:\sqrt{r(p+q-r)}\\
&=s\sqrt{(Q+R)(2P)}:s\sqrt{(R+P)(2Q)}:s\sqrt{(P+Q)(2R)}\\
&=\sqrt{P(Q+R)}:\sqrt{Q(R+P)}:\sqrt{R(P+Q)},
\end{aligned}$$

如此即得到「垂心面積比逆求邊長比問題」之解答，即證明第一節的性質 3 成立。

另一方面，我們可利用(11)式假設

$$P=(q+r-p)t, \qquad Q=(r+p-q)t, \qquad R=(p+q-r)t,$$

其中 $t>0$，利用第一節性質 3「由垂心面積比逆求邊長比公式」的結論(即(4)式)，可寫下

$$\begin{aligned}
&a:b:c=\sqrt{P(Q+R)}:\sqrt{Q(R+P)}:\sqrt{R(P+Q)}\\
&=t\sqrt{(q+r-p)(2p)}:t\sqrt{(r+p-q)(2q)}:t\sqrt{(p+q-r)(2r)}\\
&=\sqrt{p(q+r-p)}:\sqrt{q(r+p-q)}:\sqrt{r(p+q-r)}.
\end{aligned}$$

如此即得到「外心面積比逆求邊長比問題」的解答，即證明第一節的性質 1 成立。至此，我們就在性質 4 成立的條件下證明了性質 1 與性質 3 等價，證明完畢。

透過上述討論，可知若求得垂心和外心的「由面積比逆求邊長比」兩問題其中之一的解答(即證明性質 1 與性質 3 其中之一)，則只要利用(10)式或(11)式作推論，另一個問題就可以迎刃而解，這就說明了兩問題「內在的共通性」，而性質 4 就是建立此「共通性」的關鍵。

看完上述的證明與相關說明後，讀者應可明白性質 4 的重要性，但我們目前尚未證明它。因此，底下筆者將為大家介紹性質 4 的兩種不同證明方式，其中第一種證明方式較簡單，可利用上面介紹之公式 1 與公式 2 的結論來完成，證明如下：

證明：在銳角 ΔABC 中，令 $a=\overline{BC}, b=\overline{CA}, c=\overline{AB}$，若以性質 4 的(9)式搭配改寫自公式 2 結論的(7)式，可知

$$\begin{aligned}&P:Q:R=\Delta HBC:\Delta HCA:\Delta HAB\\&=(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2):(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2):(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2).\end{aligned}$$

透過上式假設

$$\begin{aligned}P&=t(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2),\\Q&=t(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2),\\R&=t(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2),\end{aligned}$$

其中 $t>0$，再利用上述三式計算 $Q+R, R+P, P+Q$，可得

$$\begin{aligned}Q+R&=2ta^2(b^2+c^2-a^2),\\R+P&=2tb^2(c^2+a^2-b^2),\\P+Q&=2tc^2(a^2+b^2-c^2).\end{aligned}$$

此時以上述三式搭配公式 1 結論的(5)式與性質 4 的(8)式，可推得

$$\begin{aligned}&(Q+R):(R+P):(P+Q)\\&=a^2(b^2+c^2-a^2):b^2(c^2+a^2-b^2):c^2(a^2+b^2-c^2)=\Delta OBC:\Delta OCA:\Delta OAB=p:q:r,\end{aligned}$$

故(10)式成立。而在(10)式成立的條件下，我們令 $p=(Q+R)s, q=(R+P)s, r=(P+Q)s$，其中 $s>0$，即可推得

$$(q+r-p):(r+p-q):(p+q-r)=2Ps:2Qs:2Rs=P:Q:R,$$

故(11)式成立；另一方面，在(11)式成立的條件下，仿照上式的推論方式同理可證明(10)式成立，這部分就留給讀者練習。至此可知(10), (11)兩式等價，故性質 4 證明完畢。

上述對性質 4 的證明，其實是仿照[3]文中證明主要定理(垂心面積比逆求邊長比公式，即本文第一節公式 2)時所使用的推論方式而寫下。由於上述證明使用了公式 1 與公式 2 的結論，因此使得其證明過程相當簡短。不難發現，上述證明的手法較偏向代數操作，因此我們可以問，是否有較具幾何意味的證明方式呢？此外，若不使用公式 1 與公式 2，是否仍可證明性質 4 呢？

上述兩個問題的答案都是肯定的。底下，筆者將在不使用公式 1 與公式 2 的條件下對性質 4 介紹一個較具幾何意味的另證。不過在介紹該另證之前，筆者需先介紹兩個重要性質。其中，第一個性質的敘述及其證明如下：

性質 5：已知 P 為 ΔABC 所在平面上的一點，且滿足底下的向量關係式：

$$\ell\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0}, \tag{12}$$

其中 $\ell,m,n>0$，則有

$$\Delta PBC:\Delta PCA:\Delta PAB=\ell:m:n. \tag{13}$$

證明：將(12)式等號兩側的向量拿來同時與 $\overrightarrow{PB}$ 做外積，可得

$$\ell\left(\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right)+m\left(\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PB}\right)+n\left(\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{PB}\right)=\vec{0}\times\overrightarrow{PB}.$$

因為 $\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PB}=\vec{0}\times\overrightarrow{PB}=\vec{0}$ 且 $\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{PB}=-\left(\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}\right)$，故上式可改寫為

$$\ell\left(\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right)=n\left(\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}\right).$$

利用上式可推得

$$\ell\cdot\frac{\left|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right|}{2}=n\cdot\frac{\left|\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}\right|}{2}.$$

由於兩向量作外積所得之向量其長度之半恰好是原本兩向量所張的三角形面積，因此上式可改寫為 $\ell\cdot\Delta PAB=n\cdot\Delta PBC$，從而有

$$\Delta PBC:\Delta PAB=\ell:n. \tag{14}$$

接著將(12)式等號兩側的向量同時拿來與 $\overrightarrow{PC}$ 做外積，同理可推得 $\ell\cdot\Delta PCA=m\cdot\Delta PBC$，從而有

$$\Delta PBC:\Delta PCA=\ell:m. \tag{15}$$

利用(14), (15)兩式，即可推得

$$\Delta PBC:\Delta PCA:\Delta PAB=\ell:m:n.$$

因此(13)式成立，至此性質 5 證明完畢。

而筆者想介紹的第二個重要性質，其敘述與證明如下：

性質 6：已知 P 為 ΔABC 內部的一點，且

$$\Delta PBC:\Delta PCA:\Delta PAB=\ell:m:n,$$

其中 $\ell, m, n > 0$，則有

$$\ell\overrightarrow{PA} + m\overrightarrow{PB} + n\overrightarrow{PC} = 0. \tag{16}$$

證明：延長 $\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP}$ 假設分別交 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 於 D, E, F，請參考下圖。

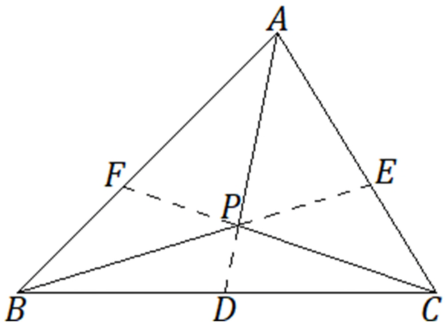

圖 3

由性質 6 的前提可知 $\Delta PBC:\Delta PCA = \ell:m$，因此可推得

$$\overline{FB}:\overline{FA} = \Delta FBC:\Delta FAC = \left(\frac{\overline{CF}}{\overline{CP}} \times \Delta PBC\right):\left(\frac{\overline{CF}}{\overline{CP}} \times \Delta PAC\right) = \Delta PBC:\Delta PAC = \ell:m.$$

利用上式的條件可寫下

$$\overrightarrow{CF} = \frac{\ell}{\ell+m}\overrightarrow{CA} + \frac{m}{\ell+m}\overrightarrow{CB}. \tag{17}$$

　　另一方面，依照性質 6 的前提假設

$$\Delta PBC = \ell k, \qquad \Delta PCA = mk, \qquad \Delta PAB = nk,$$

其中 $k > 0$，由於 $\Delta PBF:\Delta PAF = \overline{FB}:\overline{FA} = \ell:m$，因此可推得

$$\Delta PAF = \frac{m}{\ell+m}\Delta PAB = \frac{m}{\ell+m} \times kn.$$

觀察圖3中的 $\Delta PAF, \Delta PAC$，利用上式可寫下

$$\overline{PF}:\overline{PC} = \Delta PAF:\Delta PAC = \left(\frac{m}{\ell+m} \times nk\right):mk = n:(\ell+m),$$

而上式就告訴我們

$$\overline{CF}:\overline{PC} = (\overline{PC} + \overline{PF}):\overline{PC} = (\ell+m+n):(\ell+m).$$

以上式的條件搭配(17)式，即可推得

$$\overrightarrow{CP}=\frac{\ell+m}{\ell+m+n}\overrightarrow{CF}=\frac{\ell}{\ell+m+n}\overrightarrow{CA}+\frac{m}{\ell+m+n}\overrightarrow{CB}$$

$$=\frac{\ell}{\ell+m+n}\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}\right)+\frac{m}{\ell+m+n}\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}\right).$$

取上式的頭尾同時乘上 $\ell+m+n$，整理後即得

$$\ell\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=0,$$

因此(16)式成立，至此性質 6 證明完畢。

上述的性質 5，其實是筆者參考數學傳播季刊[4]文中的公式 2 後將其改寫而得，注意此處對性質 5 的證明方式與[4]文不同(註 1)。而性質 6 則是將性質 5 的前提與結論對調後，加上 P 為 ΔABC 內部一點為新前提之條件而得的命題。

有了性質 5 與性質 6 之後，筆者介紹性質 4 的另證如下：

證明：令銳角 ΔABC 的三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 的中點分別為 D,E,F，連接 $\overline{DE},\overline{EF},\overline{FD}$ 後，作 ΔDEF 三邊上的高並設三高交於 ΔDEF 的垂心 H'，如下圖。

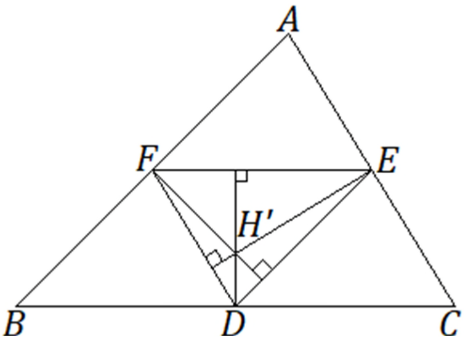

圖 4

上圖其實是筆者仿照數學傳播季刊[6]文裡的圖一所繪製，參考在[6]文圖一下方作者的說法，可知圖 4 中 ΔDEF 垂心 H' 同時也是 ΔABC 之外心 O。

接著我們回到原本的銳角 ΔABC，畫出其三中線 $\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$ 並連接 $\overline{DE},\overline{EF},\overline{FD}$ 後，結果如下圖所示。

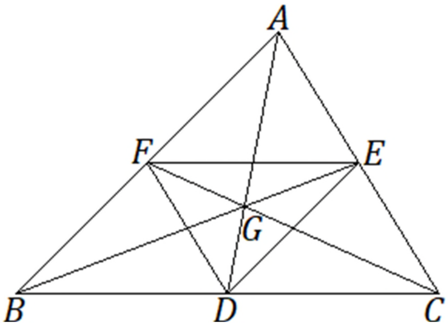

圖 5

注意上圖在[6]文裡的圖二也曾出現，引用在[6]文圖二下方作者的說法，可知上圖中「G 為 ΔABC 和 ΔDEF 的共同重心，由相關位置可以看出 ΔDEF 是 ΔABC 繞重心 G 旋轉 180° 之後再縮小一半的結果」。在這樣的看法之下，我們有底下三式：

$$\overrightarrow{GD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}, \qquad \overrightarrow{GE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}, \qquad \overrightarrow{GF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}.$$

因此可知

$$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GD}, \tag{18}$$

$$\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GE}, \tag{19}$$

$$\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GF}. \tag{20}$$

以上六式其實是我們在國中時所學過的一個幾何性質，即圖 5 中重心 G 在 ΔABC 三中線上的位置滿足 $\overline{GA} = 2\overline{GD}, \overline{GB} = 2\overline{GE}, \overline{GC} = 2\overline{GF}$。接著，請讀者參考筆者仿照[6]文的圖三而繪製的下圖。

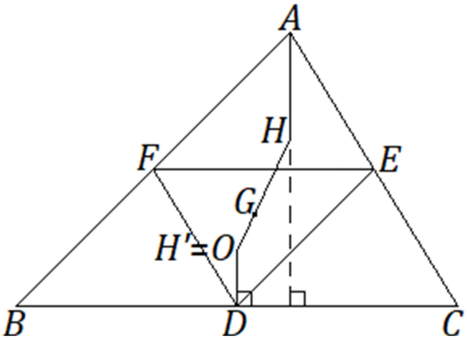

圖 6

注意上圖包含了圖 4 與圖 5 裡面的一些重要資訊，其中 O, G, H 分別為 ΔABC 的外心、重心與垂心。根據[6]文圖三底下所介紹的內容，我們知道圖 6 中 O, G, H 三點落在同一條直

線上，此直線稱為 ΔABC 的尤拉線，其中 G 點落在 $\overline{HO}$ 上的位置滿足 $\overline{GH}=2\overline{GO}$。因此，我們有底下的關係式：

$$\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}. \tag{21}$$

接下來，我們準備利用前面已知或已推得的條件證明性質 4。先回顧性質 4 前提之(8), (9)兩式，首先由(9)式知

$$\Delta HBC:\Delta HCA:\Delta HAB=P:Q:R.$$

由於垂心 H 在銳角 ΔABC 的內部且 P,Q,R 三數均正，因此利用性質 6 搭配上式可推得

$$P\overrightarrow{HA}+Q\overrightarrow{HB}+R\overrightarrow{HC}=\vec{0}. \tag{22}$$

注意上式可改寫為

$$P\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GH}\right)+Q\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GH}\right)+R\left(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GH}\right)=\vec{0},$$

利用(18), (19), (20), (21)四式，可將上式再改寫為

$$P\left(-2\overrightarrow{GD}+2\overrightarrow{GO}\right)+Q\left(-2\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GO}\right)+R\left(-2\overrightarrow{GF}+2\overrightarrow{GO}\right)=\vec{0}.$$

對上式等號兩側同時乘上 $-\frac{1}{2}$，可得

$$P\left(\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GO}\right)+Q\left(\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GO}\right)+R\left(\overrightarrow{GF}-\overrightarrow{GO}\right)=\vec{0},$$

因此有

$$P\overrightarrow{OD}+Q\overrightarrow{OE}+R\overrightarrow{OF}=\vec{0}. \tag{23}$$

觀察圖 6，由於 D,E,F 分別為 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 的中點，因此有底下三式：

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right),\qquad \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right),\qquad \overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).$$

將上述三式代入(23)式，整理後可得

$$\frac{Q+R}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{R+P}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{P+Q}{2}\overrightarrow{OC}=\vec{0}.$$

注意上式中 $\frac{Q+R}{2},\frac{R+P}{2},\frac{P+Q}{2}$ 三係數均正，因此在上式的條件下利用性質 5 可推得

$$\Delta OBC:\Delta OCA:\Delta OAB=\left(\frac{Q+R}{2}\right):\left(\frac{R+P}{2}\right):\left(\frac{P+Q}{2}\right)=(Q+R):(R+P):(P+Q).$$

最後以上式搭配(8)式的條件，即得

$$p:q:r=\Delta OBC:\Delta OCA:\Delta OAB=(Q+R):(R+P):(P+Q).$$

故(10)式成立，且同理可證明(10),(11)兩式等價，至此我們再次證明了性質 4 成立。

參、性質 2 的證明

對於第一節所介紹之內含「一對奇特的比例式」的性質 2，此處筆者介紹其證明如下：

證明：以性質 2 前提中 p,q,r 三數非零的條件搭配(2)式，首先可知底下三數皆為非零實數：

$$y+z-x,\qquad z+x-y,\qquad x+y-z.$$

觀察(2)式後，我們可假設

$$X=y+z-x,\qquad Y=z+x-y,\qquad Z=x+y-z,$$

因此知 X,Y,Z 三數均非零。注意我們有

$$Y+Z=2x,\qquad Z+X=2y,\qquad X+Y=2z,$$

因此在(2)式成立的條件下，可知

$$p:q:r=2x(y+z-x):2y(z+x-y):2z(x+y-z)=(Y+Z)X:(Z+X)Y:(X+Y)Z,$$

而利用上式可再推得

$$(q+r-p):(r+p-q):(p+q-r)=2YZ:2ZX:2XY. \tag{24}$$

由於 X,Y,Z 三數均非零，因此利用以上五式可推得

$$\begin{aligned}p(q+r-p):q(r+p-q):r(p+q-r)&=(Y+Z)2XYZ:(Z+X)2XYZ:(X+Y)2XYZ\\&=(Y+Z):(Z+X):(X+Y)=2x:2y:2z=x:y:z,\end{aligned}$$

故(3)式成立，至此性質 2 證明完畢。

除了上述的證明方法外，接著筆者介紹性質 2 的一個另證如下：

證明：以性質 2 前提中 p,q,r 三數均非零的條件搭配(2)式，可知底下三數均為非零實數：

$$y+z-x, \qquad z+x-y, \qquad x+y-z.$$

觀察(2)式後，我們可假設

$$X=y+z-x, \qquad Y=z+x-y, \qquad Z=x+y-z,$$
$$P=q+r-p, \qquad Q=r+p-q, \qquad R=p+q-r,$$

因此知 X,Y,Z 三數均非零。注意我們有

$$Y+Z=2x, \qquad Z+X=2y, \qquad X+Y=2z,$$
$$Q+R=2p, \qquad R+P=2q, \qquad P+Q=2r,$$

其中 $Q+R,R+P,P+Q$ 均不為零，因此在(2)式成立的條件下，我們有

$$2p:2q:2r=2x(y+z-x):2y(z+x-y):2z(x+y-z).$$

而上式可改寫為

$$(Q+R):(R+P):(P+Q)=(Y+Z)X:(Z+X)Y:(X+Y)Z=(ZX+XY):(XY+YZ):(YZ+ZX).$$

利用上式的條件，我們令

$$Q+R=(ZX+XY)t,\ \ R+P=(XY+YZ)t,\ \ P+Q=(YZ+ZX)t,$$

其中 $t\neq 0$，則可先推得 $P+Q+R=(XY+YZ+ZX)t$，再搭配以上三式求得

$$P=YZt,\ \ Q=ZXt,\ \ R=XYt.$$

由於 X,Y,Z,t 四數均非零，因此由以上三式知 P,Q,R 三數均非零，且利用以上三式可先推得 $P:Q:R=YZ:ZX:XY=\frac{1}{X}:\frac{1}{Y}:\frac{1}{Z}$，再推得

$$PX:QY:RZ=1:1:1. \tag{25}$$

由上式可知 $X:Y:Z=\frac{1}{P}:\frac{1}{Q}:\frac{1}{R}=QR:RP:PQ$，因此有

$$(Y+Z):(Z+X):(X+Y)=(RP+PQ):(PQ+QR):(QR+RP)=(Q+R)P:(R+P)Q:(P+Q)R.$$

而上式可改寫為

$$2x:2y:2z=2p(q+r-p):2q(r+p-q):2r(p+q-r),$$

利用上式即可推得(3)式成立，至此性質 2 證明完畢。

上述性質 2 的兩個證明，皆是在(2)式成立的條件下證明(3)式成立。不過，請注意(3)式的寫法剛好是將(2)式中的 p,q,r 與 x,y,z 互調之後的結果，故我們可再次利用性質 2 在(3)式成立的條件下推得(2)式成立。透過以上說明，我們知道性質 2 中的(2),(3)兩式等價，因此有底下的性質：

性質 7：設 p,q,r,x,y,z 皆為非零實數，則底下兩式等價：

$$p:q:r = x(y+z-x):y(z+x-y):z(x+y-z), \tag{26}$$

$$x:y:z = p(q+r-p):q(r+p-q):r(p+q-r). \tag{27}$$

此外，注意以上述性質 2 第一個證明中的(24)式搭配原本 X,Y,Z 的假設，可推得

$$\begin{aligned}(q+r-p)(y+z-x):(r+p-q)(z+x-y):(p+q-r)(x+y-z) &= 2YZX:2ZXY:2XYZ \\ &= 1:1:1.\end{aligned}$$

而上式其實就是上述性質 2 第二個證明中的(25)式。因此，我們知道性質 2 中的六個非零數 p,q,r,x,y,z 滿足

$$(q+r-p)(y+z-x) = (r+p-q)(z+x-y) = (p+q-r)(x+y-z).$$

這是個有趣的結果，其中上式中六個括號內的表達式均非零。事實上，我們可證明底下的性質成立：

性質 8：已知 p,q,r,x,y,z 皆為非零實數且滿足

$$p:q:r = x(y+z-x):y(z+x-y):z(x+y-z), \tag{28}$$

則有

$$(q+r-p)(y+z-x) = (r+p-q)(z+x-y) = (p+q-r)(x+y-z), \tag{29}$$

且上式中六個小括號內的表達式均非零。

證明：由性質 8 前提之中(28)式成立的條件可知(26)式成立，因此利用性質 7 可推得(27)式成立，接著我們可利用(26),(27)兩式推得

$$(y+z-x):(z+x-y):(x+y-z) = \frac{p}{x}:\frac{q}{y}:\frac{r}{z},$$

$$(q+r-p):(r+p-q):(p+q-r) = \frac{x}{p}:\frac{y}{q}:\frac{z}{r}.$$

利用以上兩式，即可推得

$$(q+r-p)(y+z-x):(r+p-q)(z+x-y):(p+q-r)(x+y-z)=\frac{x}{p}\cdot\frac{p}{x}:\frac{y}{q}\cdot\frac{q}{y}:\frac{z}{r}\cdot\frac{r}{z}=1:1:1,$$

故(29)式成立，至此性質 8 證明完畢。

本節最後，筆者想分享一個小問題供讀者思考。這個問題是：若我們將性質 8 的前提與結論對調，則可得到一個新的命題，而此新命題是否會成立呢？至於這個問題的解答，就留給有興趣的讀者自行思考並設法研究看看。

肆、結語

當初發現[1],[2]兩篇作品後，便對這兩篇文章探討的主題感到相當有興趣，因此便開始進行相關的研究。本文寫作的目的，是希望以[1],[2]文既有的研究成果為基礎，進一步提出自己的研究成果供讀者參考。幸運的是，因為用上[4],[5]文中的研究成果，筆者才能寫出第二節中性質 4 的第二個證明。至於第三節內容的寫作動機，主要是筆者想對第一節的性質 2 介紹兩個使用變數變換技巧來完成的證明，並另外作一些延伸探討。

回顧本文第一節與第二節的內容，可發現[2]文應是本文探討內容之源頭。在此，筆者要感謝本文參考文獻的作者陳建燁、劉俊傑、阮瑞泰與張海潮四位老師(依參考文獻順序)，因為有他們傑出的作品發表在先，才會促成本文的誕生。

註 1：先前筆者曾對數學傳播[4]文中的公式 2 寫下了一個另證並撰文投稿數學傳播季刊，雖然該次投稿最後並未被接受，但審稿者在審稿意見中介紹了使用外積證明該公式的簡潔證法。因此在本文中，筆者也使用該方法用來證明第二節中的性質 5，注意性質 5 其實是[4]文之公式 2 的特例。

參考文獻

1. 陳建燁。一對奇特的比例式：由外心面積比逆求三角形邊長比。高中數學學科電子報，第 143 期，2019 年 2 月。
2. 陳建燁。由垂心面積比逆求三角形邊長比。高中數學學科電子報，第 148 期，2019 年 7 月。
3. 劉俊傑。換個觀點看三角形的四心。數學傳播季刊，30(2)，28-39，2006。
4. 阮瑞泰。三角形的四心之向量關係式。數學傳播季刊，34(1)，29-34，2010。
5. 張海潮。從旋轉及縮放看尤拉線與九點圓。數學傳播季刊，33(2)，48-51，2009。
6. Change of variables, Wikipedia.