

第 45 屆國際數學奧林匹亞競賽

試題與參考解答（續）

傳承德* 洪文良**

*中央研究院 統計科學研究所

**國立新竹師範學院 數學教育學系

第四題：試題委員會公布的參考答案：

參考解答（一）：藉由對稱性，只需證明 $t_1 < t_2 + t_3$ 。經由計算可得

$$\sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{t_i}{t_j} \right) = n + t_1 \left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) + \frac{1}{t_1} (t_2 + t_3) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ (i,j) \neq (1,2)(1,3)}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right)。$$

根據 AM-GM 不等式，對所有 i, j

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \geq \frac{2}{\sqrt{t_2 t_3}}, t_2 t_3 \geq 2\sqrt{t_2 t_3}, \frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \geq 2$$

所以，設 $a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} > 0$ ，利用假設，我們可得到

$$n^2 + 1 > \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \geq n + 2 \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} + 2 \frac{\sqrt{t_2 t_3}}{t_1} + 2 \left[\binom{n}{2} - 2 \right] = 2a + \frac{2}{a} + n^2 - 4。$$

因此， $\frac{2a+2}{a-5} < 0$ ，可推得 $\frac{1}{2} < a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} < 2$ 。所以， $t_1 < 2\sqrt{t_2 t_3}$ ，且再利用 AM-GM 不等

式可推得 $t_1 < 2\sqrt{t_2 t_3} \leq t_2 + t_3$ 。

參考解答（二）：考慮原不等式的左邊，經由計算可得

$$n^2 + 1 > n + \left(\frac{t_2}{t_1} + \frac{t_3}{t_1} \right) + \left(\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_1}{t_3} \right) + \sum_{\substack{i < j \\ (i,j) \notin \{(1,2), (1,3)\}}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\geq n + \left(\frac{t_2}{t_1} + \frac{t_3}{t_1} \right) + \left(\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_1}{t_3} \right) + 2 \left(\binom{n}{2} - 2 \right) \\
&= n^2 - 4 + \left(\frac{t_2}{t_1} + \frac{t_3}{t_1} \right) + \left(\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_1}{t_3} \right)
\end{aligned}$$

所以

$$\left(\frac{t_2}{t_1} + \frac{t_3}{t_1} \right) + \left(\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_1}{t_3} \right) < 5. \quad (1)$$

令

$$a = \frac{t_2}{t_1} + \frac{t_3}{t_1} = \frac{t_2 + t_3}{t_1}.$$

根據 AM-HM, 可得到

$$\frac{2}{\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_1}{t_3}} \leq \frac{a}{2}$$

所以

$$\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_1}{t_3} \geq \frac{4}{a}.$$

把上述兩式代入 (1) 式, 可得 $a + \frac{4}{a} < 5$, 此式等價於 $a^2 - 5a + 4 = 0$, 也就是 $(a-1)(a-4) < 0$, 給定 $a > 1$, Q.E.D.

王琨傑同學的解法：根據柯西恆等式, 有

$$\begin{aligned}
\because (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) &= \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 \\
&= \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 + \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j b_i b_j - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j b_i b_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j b_i b_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i^2 a_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i a_j b_i b_j)
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

$$\text{故知 } (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right) = n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sqrt{\frac{t_i}{t_j}} - \sqrt{\frac{t_j}{t_i}} \right)^2$$

用反證法, 設 $\exists i < j < k \leq n$ t_i, t_j, t_k 不為某一三角形之三邊長。

則不失一般性 (WLOG), 不妨設 $t_i \geq t_j + t_k$

又 $\because \left(x - \frac{1}{x} \right)^2$ 在 $[1, \infty)$ 是嚴格遞增 (當 x 變大, $\frac{1}{x}$ 變小, 其差變大, 故其值變大)

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{t_k}{t_i}} - \sqrt{\frac{t_i}{t_k}} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{t_k}{t_i}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{t_k}{t_i}}} \right)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{t_i + t_j}{t_i}} - \sqrt{\frac{t_i}{t_i + t_j}} \right)^2$$

$$(\because \sqrt{\frac{t_k}{t_i}} > 1)$$

$$\text{同理 } \left(\sqrt{\frac{t_k}{t_j}} - \sqrt{\frac{t_j}{t_k}} \right)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{t_i + t_j}{t_j}} - \sqrt{\frac{t_j}{t_i + t_j}} \right)^2$$

$$\text{此時有 } n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right)$$

$$\begin{aligned} &= n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sqrt{\frac{t_i}{t_j}} - \sqrt{\frac{t_j}{t_i}} \right)^2 \\ &\geq n^2 + \left(\sqrt{\frac{t_k}{t_i}} - \sqrt{\frac{t_i}{t_k}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{t_k}{t_j}} - \sqrt{\frac{t_j}{t_k}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq n^2 + \left(\sqrt{\frac{t_i + t_j}{t_i}} - \sqrt{\frac{t_i}{t_i + t_j}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{t_i + t_j}{t_j}} - \sqrt{\frac{t_j}{t_i + t_j}} \right)^2 \\
&= n^2 + \left(\frac{t_i + t_j}{t_i} + \frac{t_i}{t_i + t_j} - 2 \right) + \left(\frac{t_i + t_j}{t_j} + \frac{t_j}{t_i + t_j} - 2 \right) \\
&= n^2 + \left(1 + \frac{t_j}{t_i} \right) + \left(1 + \frac{t_i}{t_j} \right) + \left(\frac{t_i + t_j}{t_i + t_j} \right) - 4 \\
&= n^2 + \left(\frac{t_j}{t_i} \right) + \left(\frac{t_i}{t_j} \right) - 1 \geq n^2 + \sqrt{\left(\frac{t_j}{t_i} \right) \left(\frac{t_i}{t_j} \right)} - 1 \geq n^2 + 2 - 1 \\
&= n^2 + 1
\end{aligned}$$

故假設錯誤,得知不存在 $1 \leq i < j < k \leq n$ 使得 t_i, t_j, t_k 不為某一三角形之三邊長。

$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i < j < k \leq n, t_i, t_j, t_k$ 必為某一三角形之三邊長。

第五題：試題委員會公布的參考答案：

參考解答 (一)：因 P 在 $ABCD$ 之內部,可推得 $\angle DBA < \angle DBC$ 若且為若 $\angle BDA < \angle BDC$ 。所以,不失一般性,我們可以假設 P 在三角形 ACD 和三角形 BCD 之內部。

假設 $ABCD$ 是圓內接四邊形。令線段 BP 和 DP 與線段 AC 分別相交於 K 和 L 。由已知條件可推得： $\angle ACB = \angle ADB, \angle ABD = \angle ACD$, 所以三角形 DAB, DLC 和 CKB 是相似的。即 $\angle PLK = \angle PKL$, 故 $PK = PL$ 。

三角形 ADL 和 BDC 也相似, 因此,

$$\frac{AL}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{KC}{BC},$$

由上式可得 $AL = KC$ 。結合上述的結論,可推得三角形 ALP 與 CKP 是全等三角形。因此, $AP = CP$ 。

反之,假設 $AP = CP$ 。令三角形 BCP 的外接圓分別與線段 CD 和 DP 相交於 X 和 Y 。因三角形 ADB 與 PDX 相似, 所以三角形 ADP 與 BDX 亦相似。因此

$$\frac{BX}{AP} = \frac{BD}{AD} = \frac{XD}{PD} \quad (1)$$

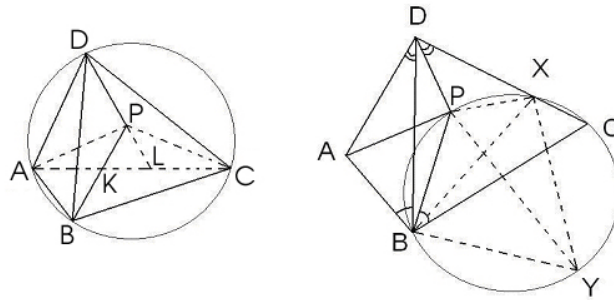
此外,三角形 DPC 與 DXY 相似,由此可得

$$\frac{YX}{CP} = \frac{XD}{PD} \quad (2)$$

因 $AP = CP$,由 (1) 式和 (2) 式可得到 $BX = YX$ 。因此

$$\angle DCB = \angle XYB = \angle XBY = \angle XPY = \angle PDX + \angle PXD = \angle ADB + \angle ADB = 180^\circ - \angle BAD$$

根據上式可得： $ABCD$ 四點共圓。

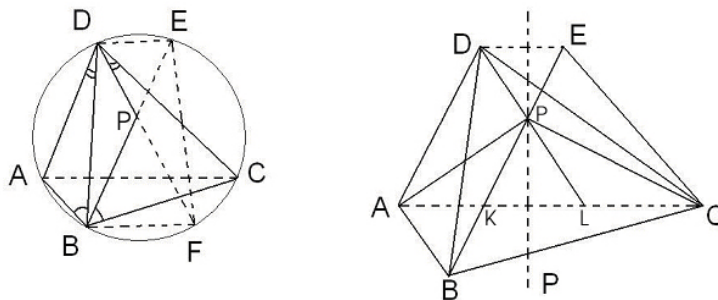


參考解答 (二)：首先假設 A, B, C, D 四點共圓。令線段 BP 和 DP 與 $ABCD$ 的外接圓

分別相交於 E 和 F 。由已知條件可得 $\widehat{AB} = \widehat{CF}$ 和 $\widehat{AD} = \widehat{CE}$, 所以

$BF \parallel AC$ 及 $DE \parallel AC$ 。因此 $BFED$ 是一個等腰梯形 (或是一個矩形), 其對角線相交於 P 。所以, P 落在外接圓的直徑上, 且其垂足落於線段 AC 上。於是 $AP = CP$ 。

接著假設 $AP = CP$ 。不失一般性的情況下, 令 P 在三角形 ACD 和 BCD 的裡面, 對於三角形 BDP 而言, 點 A 和 C 為共軛等角, 由此可得 $\angle APK = \angle CPL$ 。因 $AP = CP$ 。我們推斷, 以 p 來說 E 為 D 的反射。則 E 在線段 BP 上, 且三角形 APD 與三角形 CPE 全等。因此 $\angle BDC = \angle ADP = \angle BEC$, 其意為 B, C, E, D 四點共圓。此外, A, C, E, D 也四點共圓。所以, A, B, C, D 為圓內接四邊形。



趙心宇同學的解法：因 BD 不平分 $\angle ABC, \angle ADC$, 故 P 點僅有一個。且 $P \neq B, P \neq D$ 。

先證充分性

設 $ABCD$ 外接圓圓心為 O

過 O 作 $\overline{AC}$ 的中垂線交圓於 E, F 。 BP 交圓另一點為 G , DP 交圓另一點為 H 。

$$\because \angle ABG = \angle CBD \Rightarrow \overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{CD}$$

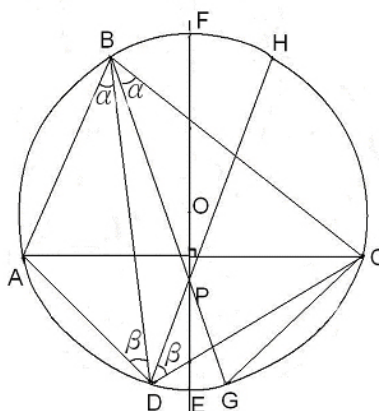
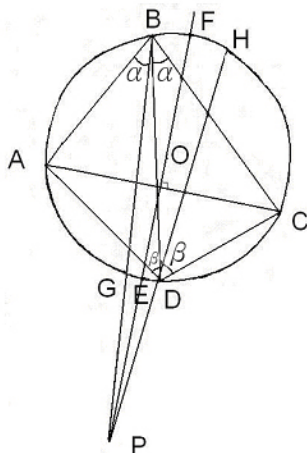
$$\Rightarrow \overset{\frown}{GE} = \overset{\frown}{ED}$$

$$\because \angle BDA = \angle HDC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{HC}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{FH}$$

故此時 BP, DP 是以 OE 為對稱軸的兩條線, 理當相交在 OE 上, 因

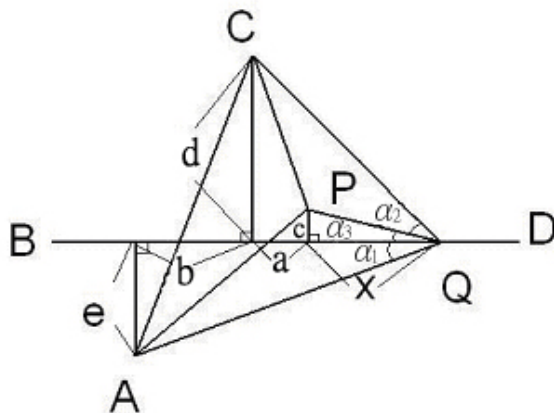
此 P 落在 OE 之上, 而 OE 為 $\overline{AC}$ 的中垂線, 故有 $AP = PC$ 。



再證必要性

因為當 A, B, C 以及 $\overrightarrow{BD}$ 射線固定時, P 也固定了。由上述充分性知道 ABC 外接圓與

$\overrightarrow{BD}$ 的另一交點滿足題設, 以下證明當 $P, A, C, \overrightarrow{BD}$ 固定時在 $\overrightarrow{BC}$ 上跑的動點 Q , 若滿足 $\angle AQP = \angle CQB$, 同時不與 (1) $ABCD$ 凸 (2) P 在 $ABCD$ 內這兩條件矛盾的, 則只有兩個點。



$$\tan \alpha_1 = \frac{e}{a+b+x}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{d}{a+x}$$

$$\tan \alpha_3 = \frac{c}{x}$$

$$\tan(\alpha_2 - \alpha_3) = \frac{\frac{d}{a+x} - \frac{c}{x}}{1 + \frac{cd}{x(a+x)}}$$

若 $\angle CQP = \angle AQB$ [(銳角), 因為要求的四邊形為凸的]

則 $\tan \alpha_1 = \tan(\alpha_2 - \alpha_3)$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{a+b+x} = \frac{\frac{d}{a+x} - \frac{c}{x}}{1 + \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{a+x}}$$

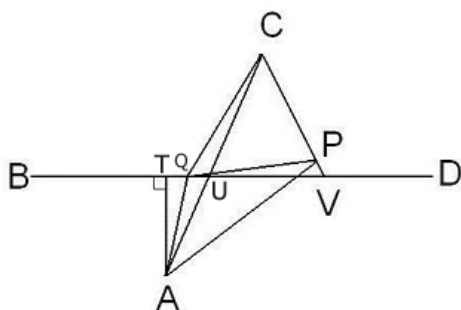
$$\Leftrightarrow (e+c-d)x^2 + (ae+2ac+bc-ad-db)x + (ecd-a^2c-abc) = 0$$

此時 x 至多有兩個解 (※)

然而 $\tan \alpha_1 = -\tan(\alpha_2 - \alpha_3)$ 也可能滿足題設

如圖, T 為 A 到 BD 的垂足

U 為 AC, BD 的交點, V 為 CP, BD 的交點。因為 P 在 $ABCD$ 的內部, 故 V 點在 B, D 兩點之間。且 U 點在 B, D 兩點之間, 因為 $ABCD$ 為凸四邊形。



當且僅當 Q 點在 TV 之間時,會有銳角的

$$\angle AQB = \angle PQC \Leftrightarrow \tan \alpha_1 = -\tan(\alpha_2 - \alpha_3)$$

然而 Q 點若符合 B, D 的條件時,又有 $\angle AQB = \angle PQC$

則 Q 必須落在 TU 之間,但 $\angle CQA < 180^\circ$

$$180^\circ > \angle CQA = \angle CQV + 180^\circ - \angle AQB > \angle CQP + 180^\circ - \angle AQB$$

$$\Leftrightarrow \angle AQB > \angle CQP, \text{不可能發生。}$$

因此,在 TV 之間的點 Q ,若要滿足 $\angle AQB = \angle PQC$

而又能當作凸四邊形 $ABCD$ 的 B 或者 D ,又使 P 在 $ABCD$ 內。這種 Q 是不存在的。

故 $\tan \alpha_1 = -\tan(\alpha_2 - \alpha_3)$ 的解不合。

而我們已經由充分性的證明知道,這 B, D 是存在的,再由前面 (※)

知道至多有兩個解。因此 D 要在三角形 ABC 的外接圓上面,即證明 $ABCD$ 四點共圓的必要性。

這裡整理一下“必要性”證明的詳細思路

因為當 $A, B, C, \overline{BD}$ 固定時,即 P 也固定了 (因 $\overline{PA} = \overline{PC}$ $\angle ABD = \angle CBP$) 而由充份

性知道 ABC 外接圓交 $\overline{BD}$ 於 D' 滿足題設。所以設 $B, A, C, \overline{BD}$ 固定時,企圖證明僅有

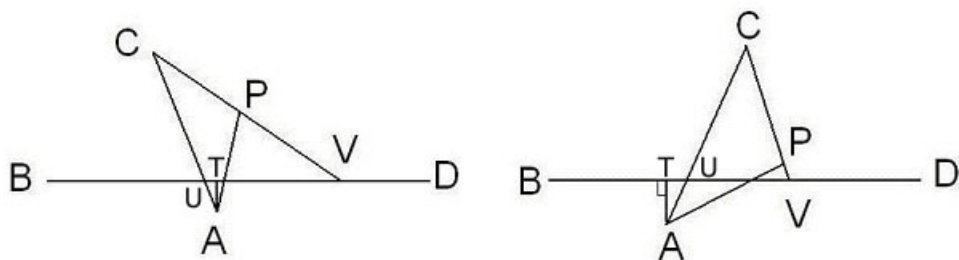
兩個點會滿足題設,如此便知 $D' = D$,即證完必要性。

由上述的方法,知道 $\begin{cases} \tan \alpha_1 = \tan(\alpha_2 - \alpha_3) \\ \tan \alpha_1 = -\tan(\alpha_2 - \alpha_3) \end{cases}$ 都可能滿足題設並且至多有四組解,而

$\tan \alpha_1 = -\tan(\alpha_2 - \alpha_3)$ 滿足題設是在取動點落於 TV 之間時。而滿足題設而跟 V 在 AC 同側的那點必需在 V 點以右 (如下圖),方能使 P 落在 $ABCD$ 之間。滿足題設而跟 B 在 AC 同側的那點必需在 U 點以左,方能使 $ABCD$ 為凸四邊形。

故只剩下 TU 這區間,利用上述的證明即知不存在滿足題設的點。

故而, B, D 恰是 $\tan \alpha_1 = \tan(\alpha_2 - \alpha_3)$ 的兩個解,並滿足題設。



(不妨設 P 在 CAD 的平面區中, T 在 UV 外或外都由右邊討論可得出最後結論)

第六題試題委員會公布的參考答案：

參考解答：一正整數 n 必有一個交錯整數是其倍數若且唯若 n 不能被 20 整除。剩下的 n 必有一個交錯整數是其倍數。

如果 n 可被 20 整除, 那麼它最後兩位小數的數字是偶數, 因此不存在一個交錯整數是其倍數。

我們個別考慮 2 的次方以及 $2 \cdot 5^n$ 此種形式的數。而 $u^k \parallel a$ 意指 u^k 為能整除 a 之 u 的最高次方。

Lemma 1. 每一個 2 的次方必有一個交錯整數是其倍數, 其數字為偶數。

Lemma 1 之證明：只要構造一個數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得：對每一個 n ,

$$a_n \equiv n+1 \pmod{2}; \quad 2^{2^{n-1}} \parallel \overline{a_{2n-1} \dots a_1}; \quad 2^{2^{n+1}} \parallel \overline{a_{2n} a_{2n-1} \dots a_1}.$$

令 $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ 。如果構造在 a_{2n} 上, 則取 $a_{2n+1} = 4$ 。那麼 a_{2n+1} 為偶數且

$$2^{2^{n+1}} \parallel \overline{a_{2n+1} a_{2n} \dots a_1} = 4 \cdot 10^{2^n} + \overline{a_{2n} a_{2n-1} \dots a_1},$$

因 $2^{2^{n+1}} \parallel \overline{a_{2n} a_{2n-1} \dots a_1}$, 利用數學歸法知 $2^{2^{n+2}} \parallel 4 \cdot 10^{2^n}$ 。令 $\overline{a_{2n+1} \dots a_1} = 2^{2^{n+1}} A$, 其中 A

為奇數。今, a_{2n+2} 必為奇數使得

$$\text{當 } 5a_{2n+2} + A \equiv 4 \pmod{8}$$

$$a_{2^{n+3}} \parallel \overline{a_{2n+2} a_{2n+1} \dots a_1} = a_{2n+2} 10^{2^{n+1}} + \overline{a_{2n+1} a_{2n} \dots a_1} = 2^{2^{n+1}} [a_{2n+2} 5^{2^{n+1}} + A] \text{ 成立。}$$

因 A 為奇數, 所以最後的解為奇數。此外, 解 a_{2n+2} 可從 $\{0, 1, \dots, 7\}$ 來選擇。故得證。

Lemma 2. 對於 $n = 1, 2, \dots$, 每個 $2 \cdot 5^n$ 型式的數必有一個交錯整數是其倍數且其數字為偶數。

Lemma 2.之證明：構造一個數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得對每一個 n ,

$$b_n \equiv n+1 \pmod{2} \text{ 且 } 2 \cdot 5^n \text{ 整盡 } \overline{b_n \dots b_1}。$$

令 $b_1 = 0, b_2 = 5$ 。假設 $b_1, \dots, b_n$ 已被構造且令 $\overline{b_n \dots b_1} = 5^l B$, 其中 $l \geq n$ 且 B 不能被 5

整除。則下一個數字 b_{n+1} 必為 $b_{n+1} \equiv n+2 \pmod{2}$ 且 5^{n+1} 整除

$$\overline{b_{n+1} b_n \dots b_1} = b_{n+1} 10^n + \overline{b_n \dots b_1} = 5^n [b_{n+1} 2^n + 5^{l-n} B]。$$

當 $b_{n+1} 2^n + B$ 被 5 整除時, 上式為真。根據中國的餘數定理, $b_{n+1} \equiv n+2 \pmod{2}$

, $b_{n+1} 2^n + B \equiv 0 \pmod{5}$, 有解 (因 2^n 和 5 互質)。且解 b_{n+1} 可從 $\{0, 1, \dots, 9\}$ 來選取。

接著, 我們針對一般的 $n = 2^\alpha 5^\beta k$, 其中 k 與 10 互質。如果 n 不能被 20 整除, 那麼 $2^\alpha 5^\beta$

為 2 的次方, 5 的次方或是 $2 \cdot 5^\beta$ 之型式的數。根據 Lemmas 1 和 2, 在所有 $2^\alpha 5^\beta$ 的情

況下, 必有一個偶數交錯整數是其倍數, 其數字為偶數 $2m$ 。顯然地,

所有具有 $\overline{MM \dots M}$ 型式之整數也是 $2^\alpha 5^\beta$ 之交錯整數倍數。我們證明以上有一部分為 $n = 2^\alpha 5^\beta k$ 之倍數。考慮

$$C_l = 1 + 10^{2m} + \dots + 10^{2m(l-1)}, \text{ 其中 } l = 1, 2, \dots, k+1,$$

根據鴿籠原理, C_{l_1} 和 C_{l_2} 為同餘模數 k , 其中 $l_1 < l_2$ 。因此, k 能整除它們的差值

$$C_{l_2} - C_{l_1} = C_{l_2-l_1} \cdot 10^{2ml_1}。且因 k 與 10 互質, 所以 k 能整除 $C_{l_2-l_1}$ 。由此可得$$

$C_{l_2-l_1} \times M$ 是具有 $\overline{MM \dots M}$ 之型式的數, 因此是 n 之交錯整數倍數。

黃道生同學的解法：只要 20 不整除 n 即可

若 $20 \mid n \Rightarrow$ 十位個位必為偶數,不合

$n=1$ 時,顯然成立 (1 即可)

20 不整除 n 可分成如下四種 case,證明他的某個倍數為交錯整數。

$$(1) \quad n = P_1^{\alpha_1} \dots P_k^{\alpha_k}, P_i \neq 2, 5 \forall i$$

$$(2) \quad n = 2^\alpha P_1^{\alpha_1} \dots P_k^{\alpha_k}, P_i \neq 2, 5 \forall i$$

$$(3) \quad n = 5^\alpha P_1^{\alpha_1} \dots P_k^{\alpha_k}, P_i \neq 2, 5 \forall i$$

$$(4) \quad n = 10 P_1^{\alpha_1} \dots P_k^{\alpha_k}, P_i \neq 2 \forall i$$

先證下列幾個 Lemma

Lemma 1. 對任意 $a \in N, a > 1$ 及 case1 中的 n 存在 l 使

$$n \mid 1 + 10^a + \dots + 10^{la}$$

proof :

$$1 + 10^a + \dots + 10^{la} = \frac{10^{(l+1)a} - 1}{10^a - 1}, \text{取 } l+1 = \varphi((10^a - 1)n)$$

$$\because (10, n) = 1, (10, 10^a - 1) = 1 \therefore 10^{(l+1)a} = (10^{l+1})^a \equiv 1$$

$$(\text{mod } n(10^a - 1)) \quad (\text{尤拉定理})$$

$$\therefore n(10^a - 1) \mid 10^{(l+1)a} - 1 \therefore n \mid \frac{10^{(l+1)a} - 1}{10^a - 1}$$

Lemma 2. 存在一個 k 位交錯整數 t_k 使 $2^k \parallel t_k$ (表示 $2^k \mid t$, 2^{k+1} 不整除 t) 當 k 為奇

數, $2^{k+1} \parallel t_k$ 當 t 為偶數且個位數是 2。(奇數位偶數,偶數位奇數)

proof : 由歸納法, $k=1$ 取 2 即可

設 $k=l$ 成立, 當 $k=l+1$ 時,

$$(1) \quad l \text{ 為奇數} \Rightarrow 2^l \parallel t_l \text{ 且第 } l+1 \text{ 位為奇數}$$

$$\text{考慮 } x = 1 \times 10^l + t_l, \quad y = 3 \times 10^l + t_{l+1}$$

$$z = 5 \times 10^l + t_l$$

$$w = 7 \times 10^l + t_l$$

皆為 $l+1$ 位交錯整數

有 $2^{l+1} \mid x, y$ ($\because t_l = 2^l$ 奇, $10^l, 3 \times 10^l$ 也都為 $2^l \times$ 奇數, x, y 為 $2^l \times$ 偶)

而 $2^{l+1} \parallel x - y = 2 \cdot 10^l \therefore x \not\equiv y \pmod{2^{l+2}}$ 但, $x, y \equiv 0$

$\pmod{2^{l+1}} \& x, y \equiv 0 \text{ or } 2^{l+1} \pmod{2^{l+2}}$

$\therefore x, y$ 其中之一有 $2^{l+2} \mid x$ or y

若為 $2^{l+2} \mid x$ 考慮

$$z = 5 \times 10^l + t_l \Rightarrow x \equiv z \equiv 0 \pmod{2^{l+2}} \text{ 但 } x \not\equiv z \pmod{2^{l+3}}$$

$\therefore$ 某個不被 2^{l+3} 整除, 即為所求, 若 $2^{l+2} \mid y$,

同理考慮 y 跟 $w = 7 \times 10^l + t_l$ 即可。

$$\therefore x - z = 4 \cdot 10^l = 2^{l+2} \cdot 5^l$$

(2) l 為偶數 $\Rightarrow 2^{l+1} \parallel t_l$, 第 $l+1$ 位為偶數

$$2^{l+2} \mid 4 \times 10^l \therefore 2^{l+1} \parallel 4 \times 10^l + t_l \text{ 且 } 4 \times 10^l + t_l \text{ 為 } l+1 \text{ 交錯整數}$$

取 $t_{l+1} = 4 \times 10^l + t_l$ 即可。

Lemma 3. 存在一個 k 位 (最高位可為 0) 交錯整數 t_k 使 $5^k \mid t_k$

proof :

$k=1$ 時 $t_1 = 5$ 即可

若 $k=l$ 有 $5^l \mid t_l$

考慮 $(1 \cdot 10^l + t_l, 3 \cdot 10^l + t_l, 5 \cdot 10^l + t_l, 7 \cdot 10^l + t_l, 9 \cdot 10^l + t_l)$

這些都被 5^l 整除, 但 $x \cdot 10^l + t_l \equiv y \cdot 10^l + t_l \pmod{5^{l+1}}$

$\Leftrightarrow (x-y)10^l \equiv 0 \pmod{5^{l+1}} \Leftrightarrow x-y \equiv 0 \pmod{5}$ 但 1,3,5,7,9 任 2 數差不為 5 的倍數。

$\therefore$ 都對 5^{l+1} 之模不同,

但模 5^{l+1} 只有 $0, 5^l, 2 \cdot 5^l, 3 \cdot 5^l, 4 \cdot 5^l, 5$ 種可能,故其中一個為 0。

同理 $(0 \cdot 10^l + t_l, 2 \cdot 10^l + t_l, 4 \cdot 10^l + t_l, 8 \cdot 10^l + t_l, 6 \cdot 10^l + t_l)$ 中也有一者被 5^{l+1}

整除,故不論第 $l+1$ 位該奇 or 偶都可取到 t_{l+1}

主證明:

case 1⁰ 由 Lemma1 取 $a = 2$ 即得

case 2⁰ 由 Lemma2 知可取一個 $2k$ 位數 t_{2k} 使 $2^\alpha \mid t_{2k}$ 為交錯數,

個位是 2,第 $2k$ 位奇數,當 $k > \alpha$ 。

設 $t_l = a_1 a_2 \dots a_{2k}$ 10 進位

由 Lemma1,取 $a = 2k \Rightarrow$ 存在 l 使

$$\frac{n}{2^\alpha} \mid 1 + 10^{2k} + 10^{4k} + \dots + 10^{2l}$$

$$\therefore n \mid (1 + 10^{2k} + \dots + 10^{2kl}) \times a_1 a_2 \dots a_{2k}$$

$$= (a_1 a_2 \dots a_{2k}) (a_1 a_2 \dots a_{2k}) \dots (a_1 a_2 \dots a_{2k})$$

奇 偶 奇 偶 奇 偶

易知此為交錯整數

case 3⁰ 證明只要把 case 2⁰ 中的 Lemma2 改成 Lemma3, 2^α 改成 5^α , 個位改成 5, 第 $2k$ 位改成偶數即可。

case 4⁰ 若 $P_i \neq 5 \forall i$, case 1⁰ 中的個位數為 1, 故把 case 1⁰ 的答案乘十倍即

可。若某個 $P_i = 5$, 把 case 3⁰ 後面加個 0 即可,

因為 case 3⁰ 的個位是 5。