中學生通訊解題第五十四期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
5401

已知 2^{6658} 是 2005 位數,且它的首位數是 1,請問在 $2^1,2^2,2^3,2^4,\cdots,2^{6658}$ 這 6658 個數中,有多少個數的首位數是 4？

參考解答：

$2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,2^8,2^9,2^{10},2^{11},2^{12},2^{13},2^{14},2^{15},2^{16},2^{17},2^{18},2^{19},2^{20},\ldots\ldots\ldots\ldots$ 的首位數是 1 , 2 ,4, 8 , 1 ,3 , 6 ,1 ,2 , 5 , 1 , 2 , 4 　, 8 , 1 , 3 　, 6 , 　1 , 2 , 5 　,1,…………

首位數的分布情形只有 (1,2,4,8)，(1,2,4,9)，(1,2,5)，(1,3,6)，(1,3,7)五種

設 4 節的(1,2,4,8)，(1,2,4,9)爲 A 類，3 節的(1,2,5)，(1,3,6)，(1,3,7)爲 B 類，若 A 類出現 x 個，B 類出現 y 個，則 $4x + 3y = 6658$ ….(1) (計 $2^0, 2^1,2^2,2^3,\ldots\ldots,2^{6657}$)

$\because$ 2^{6658} 是 2005 位數，從 $2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,\ldots.,2^{6657}$ 這 6658 個數中，每一種位數恰好被 A 類或 B 類填滿　$\therefore x + y = 2004$….(2)

解(1)(2) $\Rightarrow x = 646$，

即在 $2^1,2^2,2^3,2^4,\ldots.,2^{6658}$ 中，有 646 個數的首位數是 4

解題評註：

這是一個尋找首位數分布規律的問題，有的同學從 2^1，2^2，……，2^{20} 猜測一個首位數的分布規律，但這個猜測是不對的，正確的作法如上述詳解所示。

問題編號
5402

求作一個四邊形 $ABCD$, 使得 $\overline{AB} = \overline{CD}, \angle BAD = \angle BCD$, 但四邊形 $ABCD$ 不是平行四邊形。

參考解答：

作法：

(1) 作一個平行四邊形 $PQDT$，以 D 爲圓心畫圓弧 Γ

(2) 在圓弧 Γ 上取一點 C，作 $\angle DCB=\angle DTB$ 交 $\overline{PT}$ 於 B

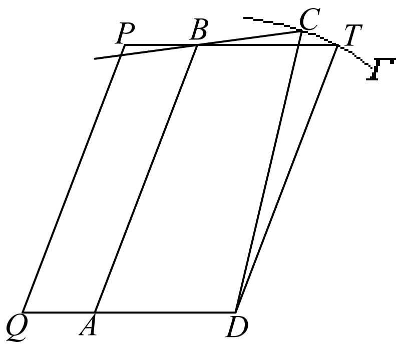
(3) 過 B 作 $\overline{AB} // \overline{PQ}$ 交 $\overline{QC}$ 於 A，則四邊形 $ABCD$ 即爲所求

證明：

$\because \angle BAD =\angle PQD=\angle DTP=\angle BCD$，

$\overline{AB} = \overline{PQ} = \overline{DT} = \overline{CD}$ ，但 $\overline{AD} \neq \overline{BC}$

四邊形 $ABCD$ 不是平行四邊形



解題評註：

一個四邊形有一雙對邊等長，一雙對角相等。直觀上常會誤以爲是平行四邊形。有些同學做出了凹四邊形或等腰梯形，均非理想的答案，上述詳解提供了一個反例的作法，供大家參考。

問題編號
5403

設 $p<q<0$,且 $p^2+q^2=4pq$,則 $\dfrac{p-q}{p+q}=?$

參考解答：

$\because$ p＜q＜0⇒p＋q＜0，p－q＜0

$$\therefore \left(p+q\right)^2=6pq,\Rightarrow p+q=-\sqrt{6pq}$$

$$\left(p-q\right)^2=2pq,\Rightarrow p-q=-\sqrt{2pq}$$

$$\Rightarrow \frac{p-q}{p+q}=\frac{-\sqrt{2pq}}{-\sqrt{6pq}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

解題評註：

此題共有11人參與作答，答對率接近70%，從這可以看出同學們對於乘法公式的應用比較嫺熟。

問題編號
5404

已知 a,b 都是質數,且使得 x 的二次方程式 $x^2-(8a-10b)x+5ab=0$ 至少有1個正整數根,求滿足條件的所有數對 (a,b)？

參考解答：

由兩根之和＝8a－10b，知兩根皆爲整數根

由兩根之積＝5ab ，知兩根皆爲正整數根

設方程式兩個正整數根分別爲 $x_1,x_2\left(x_1\le x_2\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=8a-10b\\ x_1\cdot x_2=5ab\end{cases}\Rightarrow x_1,x_2 \text{可能的分布}$$

x_1	1 ，5 ，a ，b ， 5a ，5b
x_2	5ab ，ab ，5b ，5a ， b ， a
x_1+x_2	5ab+1，ab+5，a+5b ，b+5a，b+5a，a+5b

(1) x_1+x_2＝5ab+1，5ab+1＝8a－10b 而

5ab+1＞10a＞8a－10b $\therefore$ 無解

(2) x_1+x_2＝ab+5，ab+5＝8a－10b，

⇒（a＋10）×（b－8）＝－85

合者只有 a＝7，b＝3

(3) x_1+x_2＝a+5b ⇒ a+5b＝8a－10b，

⇒7a＝15b，此與 a，b 爲質數不合

(4) x_1+x_2＝b+5a ⇒ b+5a＝8a－10b，

⇒3a＝11b⇒a＝11，b＝3

由（1）、（2）、（3）、（4）知

（a，b）＝（7，3），（11，3）。

解題評註：

此題共只有 5 人參與作答，其中 1 人作對，答對率 20％，可見同學們對於數論做詳細的分組討論的能力,有待加強訓練。

問題編號
5405

若有 8 位同學參加表演，每場表演由 4 位同學演出，每位同學參加 m 場表演，若現在要求 8 位同學中的任意兩位同時演出的次數要一樣多，求 m 的最小值，並設計出一種確實可行的方案。

參考解答：

m 的最小值爲 14

已知共有 m 場表演，假設任意兩位同學都表演 k 次，則 $mC_2^4=kC_2^8$

得 $3m=14k$，知 $k\geq 3, m\geq 14$

設計表演方案如下：

$(1,2,3,4),(1,2,5,6),(1,2,7,8),$
$(1,3,5,7),(1,3,6,8),(1,4,5,8),(1,4,6,7)$

$(5,6,7,8),(3,4,7,8),(3,4,5,6),$
$(2,4,6,8),(2,4,5,7),(2,3,6,7),(2,3,5,8)$

故知 $m=14$