

數學解題過程中的特殊化原則

翁立衛

國立臺灣師範大學 科學教育研究所

壹、前言

數學解題過程中的特殊化原則(specification)就是先以特殊、極端的情況來處理問題(Polya, 1957; Mason, Burton & Stracy, 1982)，例如：在處理四邊形問題時，先考慮平行四邊形或矩形等特殊四邊形所成立的情況。特殊化原則符合人們從具體到抽象、從特殊到一般的思考慣性(左銓如與季素月, 1998, p.82)，從最簡單的例子開始思索解題關鍵，往往較容易進入問題情境，理解問題，一旦有了成功解決特例的經驗，解題者可能更有信心(Mason, Burton, & Stacey, 1982)，從情意觀點來看，成功造就成功(success breeds success, Liljedahl, 2005, p.231)，解題者初期的成功經驗，將鼓舞他邁向整體的成功解題。筆者親身的教學經驗中發現中學生常常以特殊化原則作為解題活動的先導，先試特例或找反例；本文審查過程中，匿名的評審教授回函中亦分享他多年實際參與數學奧林匹亞競賽活動的經驗，指出參賽選手常常以特殊化原則獲得部分分數，甚至因此得到一般化論證而獲得滿分，由此可知特殊化原則在解題過程中扮演重要角色。

Polya (1957)認為特例具有啟發性，在證明題中，可透過特例，來推翻命題；如

果透過特例來審查定理，而得到與命題一致的結果時，有可能從中得到某些解題(或證明)的暗示。Polya 認為解題過程是將問題經過一連串的轉變成為一個更容易著手、更普遍與更特殊的問題，而特殊化原則就是轉變問題的一種方法。

有許多學者提到特殊化原則在解題過程中的應用(胡炳生, 1994; 趙振威, 1996; 左銓如與季素月, 1998)，胡炳生(1994)認為特殊化原則是解題思考的三原則之一，解題初步可先把大問題變成幾個簡單的小問題，並考慮最簡單的特殊狀況或是將問題分成幾種不同狀況討論。趙振威(1996)認為從特殊性著手，通常能打開解題的思路，拓展視野；建議對於任意自然數 n 的命題中，可以先考察 $n=1, 2, 3, \dots$ 時的情形；在對於任意三角形的命題中，可以先考慮等腰三角形或直角三角形等特殊情況。左銓如與季素月(1998)認為特殊化有三種模式：一是增加限制條件，例如從多邊形考慮正多邊形；二是將可變因素換成固定因素或以特定數取代變數，例如，從正 n 邊形考慮正三角形；三是考慮運動變化的極端情形，例如，從割線考慮其極限位置一切線。

特殊化原則是解題的啟思法之一(Polya, 1957)，它是一種普遍性的思考原

則，並不是解題中唯一或終極的方式；然而，解題或證明的推理過程還是要滿足條件的一般性，光是特例並不能說明整件命題的成立(龐之垣，1999；Polya, 1957；Mason et al, 1982)。因此，在解特殊問題時，在方法上一定要照顧到一般性，不能採用只對特殊問題適用的方式(龐之垣，1999, p.29)。

接下來將引用數個例子說明特殊化原則的四種功能，一、特殊化原則能增進直觀理解；二、特殊化原則具有解釋證明的功能(Hanna, 1995)；三、特殊化原則可用於檢驗命題；四、特殊化原則具有啓思的功能。因此在解題或證明過程中應用特殊化原則，能增進理解、提供直觀解釋，透過檢驗命題，推翻猜想，聚焦於可能的結果，也可以從成功的特例中得到暗示或啓發，及早進入問題情境。

一、特殊化原則能增進直觀理解

◎以三角形外角和為 360° 為例

考慮下列連續變化下的三角形外角，三角形漸漸縮小的時候，外角和是不變的，而當這個三角形縮到很小很小、幾乎要退化成一個點時，外角和等於繞了一

圈的周角，也就是 360° (如圖一)；以非常極端的三角形：一個小得不能再小、幾乎變成一個點的三角形，來檢驗這個事實的成立，以直觀的方式讓初學者接受『三角形外角和等於 360° 』這個事實。

二、特殊化原則具有解釋證明的功能

◎以和角公式為例

考慮直角 $\triangle ABC$ 與直角 $\triangle ACD$ ，其中 $\angle DCA$ 與 $\angle CBA$ 為直角，令 $\angle DAC=\alpha$ ， $\angle CAB=\beta$ ，從 D 做線段垂直 $\overline{AB}$ (垂足為 E)， F 在 $\overline{DE}$ 上且 $\overline{CF}$ 垂直 $\overline{DE}$ (如圖二)，取 $\overline{AD}=1$ 之後，即進行視覺、符號與幾何關係的轉譯：

$$\overline{DF} = 1 \times \sin \alpha \times \cos \beta$$

$$\overline{FE} = \overline{BC} = 1 \times \cos \alpha \times \sin \beta$$

$$\overline{AB} = 1 \times \cos \alpha \times \cos \beta$$

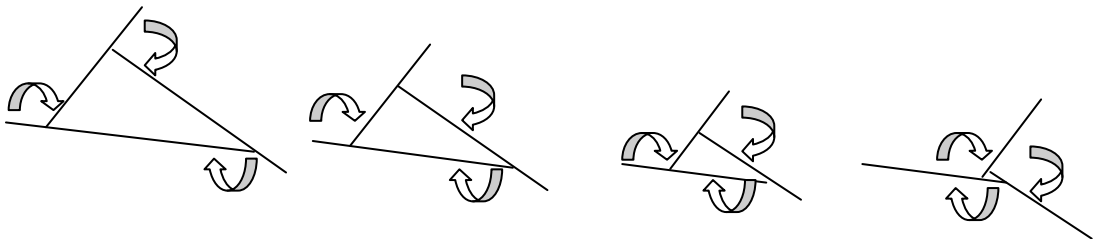
$$\overline{BE} = \overline{FC} = 1 \times \sin \alpha \times \sin \beta$$

於是，

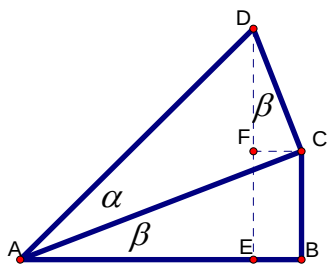
$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{DE}}{1} = \overline{DF} + \overline{FE} = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\text{同理，} \cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AE}}{1} = \overline{AB} - \overline{BE}$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$$



圖一、以特殊化的觀點說明三角形外角和為 360°



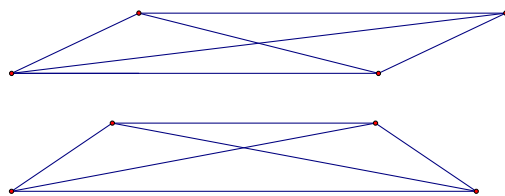
圖二、以特殊化觀點看和角公式

在本例中，特殊化有兩層意義，一是和角公式的證明不能侷限在銳角的情況討論，二是 $\sin$ 和 $\cos$ 的幾何意涵並不是僅限於弦長的意義上，這是在邁向一般性與嚴格化的過程中必須要考量的問題。然而，以這個特例解釋和角公式有以下優點：一、解釋僅是視覺、符號與幾何關係的轉譯，僅從最基本的定義出發即可推得，需要的預備知識較少；二、強化三角學中，符號與幾何關係的連結；三、對於 $\cos$ 的和角公式中的“減”號能提供解釋。對於以圖解法特殊化三角公式有興趣的讀者可參看余進發(1984)、賴漢卿(1985)、李政豐等人(2001)與顏德琮(2003)的文章。

三、特殊化原則可用於檢驗命題

1. 以『平行四邊形與等腰梯形的對角線會相互垂直嗎?』為例

以特殊的平行四邊形及等腰梯形來看(如圖三所示)，答案很明顯的，不會！在這個例子中，『垂直』是很容易被特例或視覺檢驗出來的性質，不過，並不是每一個性質都適用，如『平分』這個性質便不易透過特例檢驗出來。



圖三、以特殊的平行四邊形與等腰梯形檢驗命題

2. 以 Brahmagupta 公式為例

若 s, a, b, c, d 是圓內接四邊形 $ABCD$ 的半周長與四個邊長，則 Brahmagupta 公式就是以 s, a, b, c, d 表示該圓內接四邊形面積的公式。在正式說明之前，先設想一個情境：有一個學生要確定 Brahmagupta 公式是否為下列選項之一，該如何處置呢？

- (A). $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$
- (B). $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$
- (C). $\sqrt{(s+a)(s+b)(s+c)(s+d)}$
- (D). $\sqrt[3]{s^2(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$
- (E). $\sqrt{sabcd}$

透過一個特例，可以推翻一個選項。

如果學生能善用特殊化原則，作為消去的工具，則能以消去法找到較為正確的選項。先從單位(維度)的觀點來看，公式(A)和(E)的單位顯然有誤，因為面積公式的單位應為長度平方單位，這兩個答案先遭淘汰；以邊長為 1 的正方形為特例進行檢驗，則其面積為 1，則(C)算出來的答案為 9，因此公式(C)立刻被淘汰；如果考慮兩鄰邊長為 2,1 的矩形為特例進行檢驗，則面積為 2，但(D)算出來的答案為 $\sqrt[3]{36}$ ，也不合，因此剩下(B)為唯一選項。再考慮邊長為 2 的正方形為特例進行檢驗，發現(B)答案成立，沒有被排除，進一步考慮圓內接四邊形退化成三角形的特例，發現(B)答案會變成海龍(Heron)公式，這個選項還是沒有被排除，通過許多特例檢驗，雖然提高了“正確”的可能性，不過它還是沒有被證明為真，除了要考慮特殊化原則之外，還可以從其他重要原則獲得解題啟發，如對稱性、維度問題、邊界條件等(蔡聰明，2000)。

在本例中，透過檢驗特例的結果提醒解題者哪些想法是不行的、是禁不起考驗的，它可以阻止解題者將心力放在錯誤的方向，是一種類似(Lakatos, 1976)所說的負向啟思法。

四、特殊化原則具有啟發解題的功能

1. 以數字比大小為例

問題：比較 $753/911$, $767/925$, $741/899$ 等數字的大小。

以特殊化觀點來處理本題之前，必須說

明這三個數值的共同性質：分母比分子都大 158，再考慮滿足這個性質的特殊例子：

$$\frac{1}{159}, \frac{741}{899}, \frac{753}{911}, \frac{767}{925}, \frac{842}{1000}$$

特殊例子
特殊例子

顯然，最右邊的數字($842/1000$)大於最左邊的數字($1/159$)，因此可以直觀地“猜測”此數列有遞增的趨勢，隨分母增大而增大。也就是： $741/899 < 753/911 < 767/925$ 。

思考過程如果就此打住，只以特殊例子就“保證”一般例子的成立，不但窄化了論證的範圍：以特例代替全體，更嚴重地誤解特殊化原則的用意，特殊化是過渡到一般化論證的暫時性手段(Polya, 1957)，並不是思考的終點。

因此必須更進一步掌握分子與分母間的規律，發現分母比分子都多 158，則

數列的通則為 $\frac{x-158}{x}$ ($x=899, 911, 925$)，將

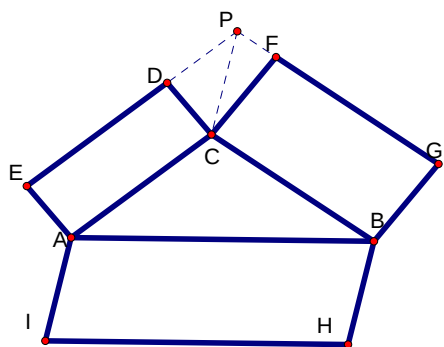
式子變形： $\frac{x-158}{x} = 1 - \frac{158}{x}$ ，顯然， x 增加

時， $\frac{158}{x}$ 反而變小，當要減去的數變小時，

值會增大，因此此數列會隨 x 增大而增大。加入這部分論證，不但符合先前以特殊例子“猜測”的結果，更兼顧邏輯推論與一般性原則，相較之下，是一個較為完整的思考過程。

2. 以 Pappus 定理的證明為例

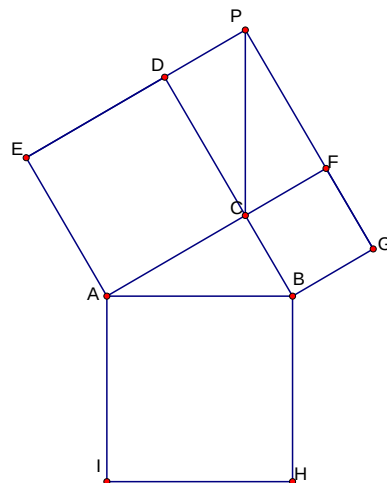
問題(Pappus 定理)：(如圖四) $\triangle ABC$ 是任意三角形，以較短兩邊 AB, BC ，向外任意做兩個平行四邊形 $ACDE$ 及 $BCFG$ ，若 DE 及 FG 兩延長線交於 P ，連 PC 並做 $AI=BH=PC$ 且 $AI//PC$ ， $BH//PC$ ，最後連 HI 得第三個平行四邊形 $ABHI$ ，證明平行四邊形 $ACDE$ 的面積加上平行四邊形 $BCFG$ 的面積等於平行四邊形 $ABHI$ 的面積。



圖四、Pappus 定理的圖例

如果將 $\triangle ABC$ 想成是直角三角形，以兩股 AB, BC ，向外任意做正方形 $ACDE$ 及 $BCFG$ ，按照題目所指示的方式做出平行四邊形 $ABHI$ ，會得到一個非常“眼熟”的圖(圖五)，這個圖形讓人想起著名的畢氏定理，這個發現具有啟發性，它暗示可行的證明方法和畢氏定理有關，某一個畢氏定理的證明經驗將可能可以轉移到這個問題的證明上。但是，畢氏定理是專屬於直角三角形中的定理，而本題中的三角形是一般三角形，“直角”的特殊性必須在一般化後被打破，這意味證明畢氏定理時應用到關於直角性質的特殊方法，如：想要以

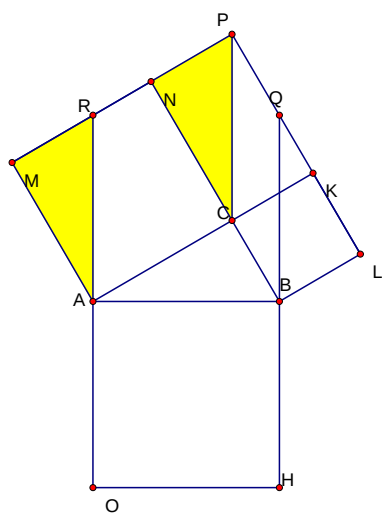
邊長 a, b, c 代表長度與面積的企圖，都可能無法用到本題，解題方法與技能必須在一般性與特殊性之間進行考慮。



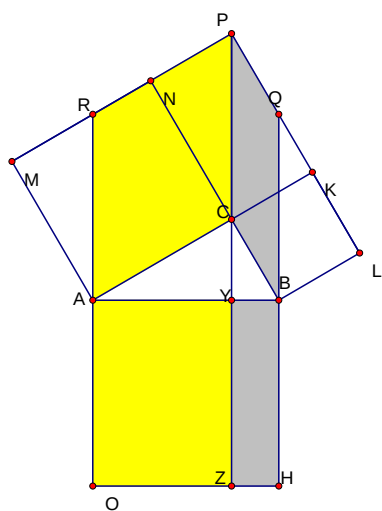
圖五、Pappus 定理的特殊化圖例

再次分析題目的條件，發現這個問題涉及平行四邊形的面積和，這意味著應該努力回想畢氏定理的證明經驗中有哪些涉及到平行、面積或與面積和有關的方法，我們想到了一個可能可行的方法：利用切割與拼湊面積的方法來證明面積和相等。

延長 $\overline{OA}$ 交 $\overline{MN}$ 於 R ，則 $\triangle AMR \cong \triangle CNP$ ，利用等量公理或直觀的拼補方式，可推得：正方形 $AMNC$ 面積=平行四邊形 $ARPC$ 面積；同理，延長 $\overline{HB}$ 交 $\overline{PL}$ 於 Q ，則利用同底同高則面積相等的概念，推得：正方形 $BCKL$ 面積=平行四邊形 $BCPQ$ 面積(圖六 A)；延長 $\overline{PC}$ 交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{OH}$ 於 Y 、 Z ，再利用同底同高則面積相等的概念，推得：平行四邊形 $ARPC$ 面積=矩形 $AYZO$ 面積且平行四邊形 $CPQB$ 面積=矩形 $YZHB$ 面積(圖六 B)，可得畢氏定理。



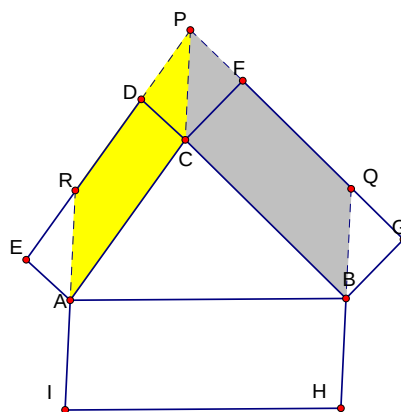
圖六 A、畢氏定理的面積證法



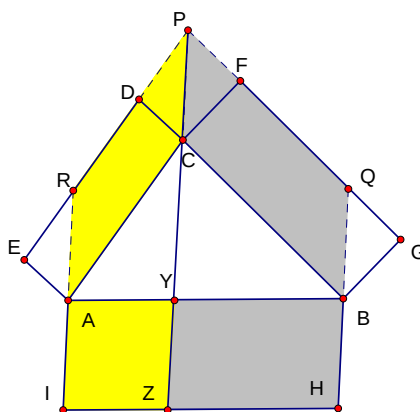
圖六 B、畢氏定理的面積證法(續)

這是一個具有啟發性的特例，而且符合先前的要求：儘量不要涉及“直角”的特殊性，避免在進行一般化時遇到障礙。由於平行線間距離相等，同底同高的情況下可得平行四邊形的面積相等，因此平行四邊形 ACDE 面積=平行四邊形 ACPR 面積，平行四邊形 BCPQ 面積=平行四邊形

BCFG 面積(圖七 A); 同理, 再次利用同底同高下, 兩平行四邊形面積相等的概念, 可得平行四邊形 ACPR 面積=平行四邊形 AIZY 面積, 平行四邊形 BCPQ 面積=平行四邊形 BHZY 面積(圖七 B); 因此可證得: 平行四邊形 ACDE 面積加上平行四邊形 BCFG 等於平行四邊形 ABHI 的面積。



圖七 A、Pappus 定理的面積證法



圖七 B、Pappus 定理的面積證法(續)

回顧並整理前述過程：利用特殊化原則，觸發本題的證明可能和畢氏定理的證明有關且涉及面積關係與平行關係的證

明，但必須排除“直角”的特殊限制，才能從特例邁向一般性，而本題所用的方法，不但適合特例(畢氏定理)，亦可推廣至一般性(Pappus 定理)。

3. 以過一共點且公切一邊的兩圓為例

問題：已知過 $\triangle ABC$ 的頂點 A 且與 $\overline{BC}$ 相切於 B 點與 C 點的兩圓半徑分別為 p, q ，試以 p, q 表示 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。

考慮最特殊的情況：兩圓外切且 A 為公切點的情況，顯然，本題轉變成公切線長度的問題，公切線長 $\overline{BC}$ =兩倍的 $\triangle ABC$

$$\text{外接圓半徑 } R = \sqrt{(\text{連心線長})^2 - (\text{半徑差})^2}$$

$$\text{因此 } \overline{BC} = \sqrt{(p+q)^2 - (p-q)^2} = 2\sqrt{pq}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{pq}$$

特殊化原則提供可能的思考方向：注意連心線、兩半徑與 $\overline{BC}$ 所構成的幾何圖形，這是一個有兩個直角的梯形，而且側

邊 $\overline{PQ}$ 長度等於上下底的長度和(圖八 A)。當特殊性消失之後，原來的圖形變成一個五邊形(圖八 B)，對於多數的中學生而言，可能是一種前所未見的新狀況，只能回頭重新研究圖八 A 中的四邊形或是從圖八 B 中的五邊形找找看有什麼關聯性。

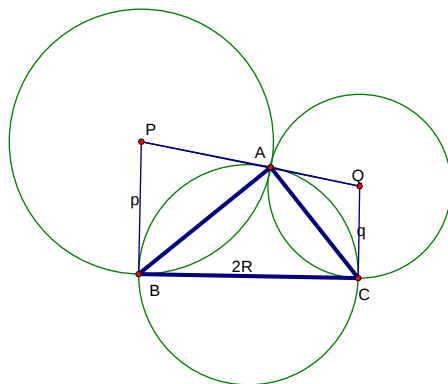
圖八 A 中的四邊形可拆解成三個三角形， $\triangle ABP$ 與 $\triangle ACQ$ 都是等腰三角形，這個特點也適用於圖八 B 中的五邊形。將焦點集中在 $\angle PAB$ 、 $\angle PBA$ 與 $\angle APB$ 上，這

些角度都可以 $\angle B$ 的度數來表示，而 $\overline{AB}$ 可用 $2p \times \sin B$ 表示，同理， $\overline{AC}$ 可用 $2q \times \sin C$ 表示(圖八 C)，這個特點也適用於圖八 D 中的五邊形。找到這兩個關聯性，解題方向大致確定，邊長可以表示成三角函數，則可用正弦定理列式：

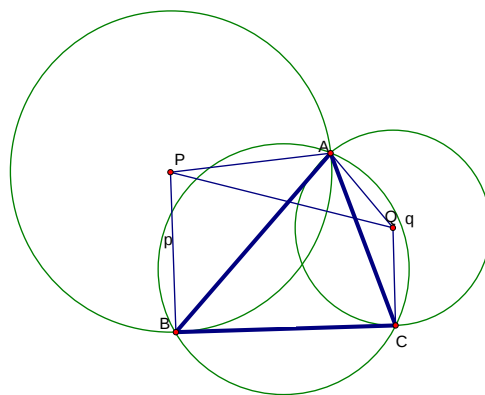
$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{2q \sin C}{\sin B} = \frac{2p \sin B}{\sin C} = 2R$$

$$\Rightarrow q(\sin C)^2 = p(\sin B)^2$$

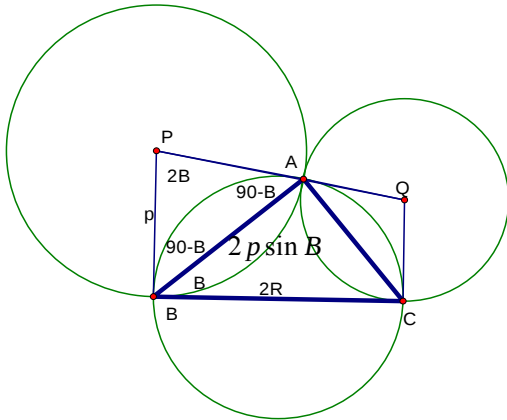
$$\Rightarrow \frac{\sin B}{\sin C} = \sqrt{\frac{q}{p}} \quad \text{因此 } R = \sqrt{pq}$$



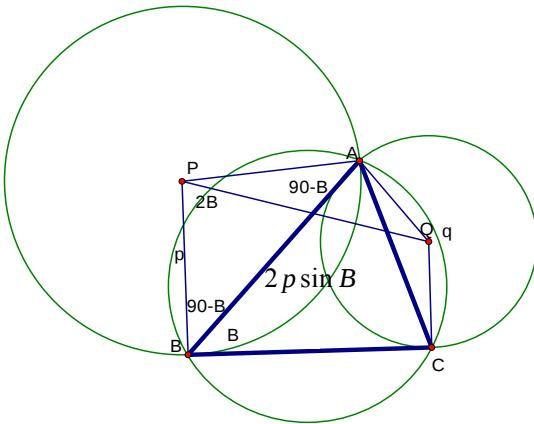
圖八 A、特例的情況



圖八 B、一般性的情況



圖八 C、回頭檢查特例所產生的新訊息



圖八 D、新訊息對應至一般情況

這三個特例具有不同的啟發功能，一、特例是通則的部分集合，從特例能夠獲得題目整體的解題方向與感覺，在觀察特例時，已經對於通則的尋找奠下基礎 (Mason *et al*, 1982, p.23)；二、特例指引解題方向及觸發解題可能用到的知識，但必須適度排除特例中所涉及的特殊性，才能有效推論至一般性的論證中；三、解決特例的經驗，有時雖然不能直接類推至通則，不過，如果重新聚焦於特例與通則之

間的連結關係，將可能有新的發現。

貳、特殊化原則的風險

使用特殊化原則時可能犯了以偏概全或以特例替代通則的毛病，而做出錯誤的決定，這是使用特殊化原則時，可能帶來的風險。因此，必須在檢驗特例之後，仍要進行一般化推論，將過程或結論推廣到原來的條件範圍中。

連尤拉這樣的數學家，都可能犯這樣的錯：他以 40 個特例來檢驗 N^2-N+41 ，發現這 40 個特例都是質數，因此做了一個結論，認為對於所有的自然數 N 而言， N^2-N+41 都是質數，事實上，這是荒謬可笑的，因為在第 41 個數的時候，遇到了矛盾的結論 (葉偉文譯，2001，p.48)。蔡聰明(2000)以圓的分割數為例，說明如果只以 $n=1,2,3,4,5$ 等特例便推測圓的分割數為 2^{n-1} 的話，就會導致錯誤，應該更進一步找尋規律，並用多種觀點來解決問題。因此要再三強調：有限的特例並不能保證所有的例子都成立，一般化的論證是不可少的。

使用特殊化原則時可能產生另一個問題：如何在一般化過程中排除特殊化情況下所應用的特殊脈絡？如果以直角三角形為特例進行探索，欲推廣至一般三角形時，就必須考慮直角三角形的特殊脈絡與一般三角形之間的差異，如果特殊脈絡無法排除，一般化便有困難；在前述 Pappus 定理的證明時，雖然以直角三角形專用的畢氏定理做為觸發解題思考的媒介，但後

續的論證工作中，要試著避開直角三角形的特殊性，避免受制於工具的特殊性。

叁、結語

特殊化原則是解題活動中的先鋒，至少有增進直觀理解、解釋證明、檢驗命題及輔助解題的啓思功能。解題者應仔細釐清特例與一般性推論之間的關係，不斷重新聚焦於特例與通則之間的連結關係，特殊化原則才能發揮效果，同時，在解題或證明的過程中，必須謹慎小心以免以偏概全，逐步排除特殊性的脈絡，才能順利將結論推廣至原來的條件範圍中，完成解題任務。

參考資料

- 台北市立建國高級中學 49 屆 314 班全體同學 (譯) (2000): Mason, J., Burton, L., 與 Stacey, K 著。數學思考。台北市：九章。
- 左銓如、季素月(1998)：初等幾何研究 (1 版)。台北市：九章。
- 余進發(1984)：三角函數和差角公式之證明。科學教育月刊，72，65-68。
- 李政豐、顏詒隆、陳蘭香、王淑霞、陳明鋒(2001)：以圖解證明公式。數學傳播，25-3，63-67。
- 胡炳生(1994)：數學解題思維方法。台北市：九章。
- 葉偉文 (譯) (2001)。Sarah Flannery 與 David Flannery 著。數學小魔女。台北市：天下文化。
- 趙振威(1996)：怎樣學好數學。台北市：凡異。
- 蔡聰明(2000)：數學的發現趣談。台北市：三民。
- 賴漢卿(1995)：直角三角形所引發的問題。科學教育月刊，84，33-38。
- 顏德琮(2003)：不同反”想”。數學傳播，27-2，74-80。
- 龐之垣(1999)：數學解題思維方法。新竹：凡異。
- 蘇育閻 (譯) (1993)：G.Polya 著。怎樣解題。台北市：九章。
- Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutation: the logic of mathematical discovery* New York, NY: Cambridge University Press.
- Liljedahl, P. G. (2005). Mathematical discovery and affect: the effect of AHA! experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 219-235.