

中學生通訊解題第五十一期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
5101

某個將軍有 1000 個武士，任何兩名武士或者互為朋友、或者互為敵人、或者互不相識，而且武士之間只和朋友說話。已知：對於每個武士而言，他的任何兩個朋友都互為敵人，而他的任何兩個敵人都互為朋友。若將軍要使所有武士都知道一項新命令，則將軍至少要通知多少名武士？

參考解答：

200 名。

由條件可知：任何一名武士的朋友都不超過 2 人。若將武士們按照朋友關係形成若干條鏈：第一個人與第二個人是朋友，第二個人與第三個人是朋友，依此類推。則每個朋友鏈的長度至多是 5。所以，至少要通知 200 名武士。

解題評註：

本題解題需證明兩件事：

- (1) 每人最多只有兩位朋友
- (2) 每通知一武士，最多可讓 5 名武士知道。

討論過程中可利用圖來協助：點代表人，

點與點的連線表示人與人之間的關係；如此說明起來較容易看懂，也不容易出錯。

問題編號
5102

求最小的自然數 $n(>1)$ ，使存在整數 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，滿足 $a_1 a_2 \dots a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2006$

參考解答：

1. $\because$ 2006 為 2 的倍數但不為 4 的倍數
 $\therefore a_1 a_2 \dots a_n = 2006$ 可得 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 有且只有一個偶數
又由 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2006$ 可得 n 為奇數且 $n \geq 3$
2. (1) 若 $n=3$ 時，明顯可證不存在合要求的整數 a_1, a_2, a_3
即 $2006 = 1 \times 1 \times 2006 = 1 \times 2 \times 1003 = 2 \times 17 \times 59$
代入三正及兩負一正等情形皆不合要求
(2) 若 $n=5$ 時，令 $a_1 = 2006, a_2 = a_3 = 1, a_4 = a_5 = -1$ ，即可得合要求的解
故 n 的最小的自然數為 5

解題重點：

1. 利用 2006 為 2 的倍數但不為 4 的倍

數，得合條件的 n 必為奇數且 $n \geq 3$ 。

2. 再說明 $n=3$ 無解， $n=5$ 時有解，故得

n 最小值為 5。

3. 本題可培養學生對數字的敏銳度。

解題評註：

本題參與徵答人數共計 12 位，其中答錯的同學皆是因造解過程將 2006 因數分解為 $2006=2 \times 1003$ 或 $2 \times 17 \times 59$ 等分解方式，並將其餘項補乘 1 至其所有項和為

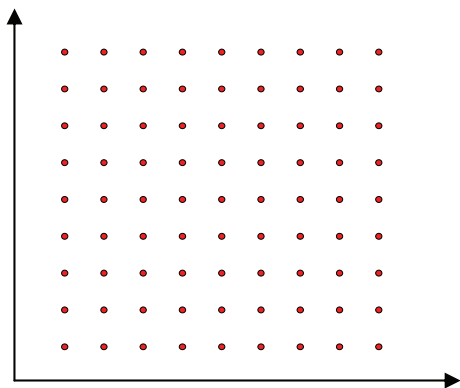
2006，即 $2006=2 \times 1003 \times \underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1}_{1001 \text{ 個 } 1}$ 或

$2 \times 17 \times 59 \times \underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1}_{1928 \text{ 個 } 1}$ 等，雖此種方式

可造出滿足方程式 $a_1 a_2 \dots a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2006$ 的解，但項數 n 則因分解 2006 而很大。其共同盲點在沒想到要 n 的最小值，就要在不因數分解 2006 的情形下補乘兩個 ± 1 。

問題編號
5103

如圖，坐標平面上，點 $P(x, y)$ 為格子點 (x, y 皆為整數的點)，若 $1 \leq x \leq 9, 1 \leq y \leq 9$ ，試問任意兩個滿足條件的點相連，共可產生幾條相異的直線？



參考解答：

依照斜率分別計算直線數

項目	斜率	相異直線數	項目	斜率	相異直線數
1	0	9 條	13	$\pm \frac{5}{4}, \pm \frac{4}{5}$	$20 \times 2 \times 2 = 80$ 條
2	不存在	9 條	14	$\pm \frac{6}{5}, \pm \frac{5}{6}$	$12 \times 2 \times 2 = 48$ 條

3	$\pm \frac{1}{1}$	$15 \times 2 = 30$ 條	15	$\pm \frac{7}{1}, \pm \frac{1}{7}$	$16 \times 2 \times 2 = 64$ 條
4	$\pm \frac{2}{1}, \pm \frac{1}{2}$	$21 \times 2 \times 2 = 84$ 條	16	$\pm \frac{7}{2}, \pm \frac{2}{7}$	$14 \times 2 \times 2 = 56$ 條
5	$\pm \frac{3}{1}, \pm \frac{1}{3}$	$27 \times 2 \times 2 = 108$ 條	17	$\pm \frac{7}{3}, \pm \frac{3}{7}$	$12 \times 2 \times 2 = 48$ 條
6	$\pm \frac{3}{2}, \pm \frac{2}{3}$	$27 \times 2 \times 2 = 108$ 條	18	$\pm \frac{7}{4}, \pm \frac{4}{7}$	$10 \times 2 \times 2 = 40$ 條
7	$\pm \frac{4}{1}, \pm \frac{1}{4}$	$33 \times 2 \times 2 = 132$ 條	19	$\pm \frac{7}{5}, \pm \frac{5}{7}$	$8 \times 2 \times 2 = 32$ 條
8	$\pm \frac{4}{3}, \pm \frac{3}{4}$	$27 \times 2 \times 2 = 108$ 條	20	$\pm \frac{7}{6}, \pm \frac{6}{7}$	$6 \times 2 \times 2 = 24$ 條
9	$\pm \frac{5}{1}, \pm \frac{1}{5}$	$32 \times 2 \times 2 = 128$ 條	21	$\pm \frac{8}{1}, \pm \frac{1}{8}$	$8 \times 2 \times 2 = 32$ 條
10	$\pm \frac{5}{2}, \pm \frac{2}{5}$	$28 \times 2 \times 2 = 112$ 條	22	$\pm \frac{8}{3}, \pm \frac{3}{8}$	$6 \times 2 \times 2 = 24$ 條
11	$\pm \frac{5}{3}, \pm \frac{3}{5}$	$24 \times 2 \times 2 = 96$ 條	23	$\pm \frac{8}{5}, \pm \frac{5}{8}$	$4 \times 2 \times 2 = 16$ 條
12	$\pm \frac{6}{1}, \pm \frac{1}{6}$	$24 \times 2 \times 2 = 96$ 條	24	$\pm \frac{8}{7}, \pm \frac{7}{8}$	$2 \times 2 \times 2 = 8$ 條

共計有 1492 條相異直線

解題評註：

本題同學們有些未注意到並非計算產生多少條線段，而是計算產生多少條相異的直線，相同直線的情形不能重複計算，實為可惜。其餘同學大都以計算不同斜率來求相異直線數，但因很容易計算疏失，要正確確實不易。

問題編號
5104

設 n 是整數，且 $n \geq 2$ 。試求

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \\ + \cdots + (2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)$$

(用 n 的式子表示)

參考解答：

所求

$$= \frac{1}{-10} [(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9] \\ + \frac{1}{-10} [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 - 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11] \\ + \cdots + \frac{1}{-10} [(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3) \\ - (2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)] \\ = \frac{1}{-10} [-105 - (2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)]$$

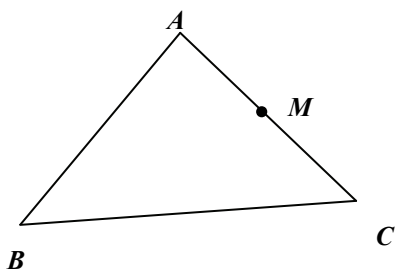
$$= \frac{1}{5}(16n^5 + 40n^4 - 40n^3 - 100n^2 + 9n + 75)$$

解題評註：

Σ 的運算性質屬於高中課程，使用它來解國中通訊徵答的題目是比不上分項對消法來的漂亮！

問題編號
5105

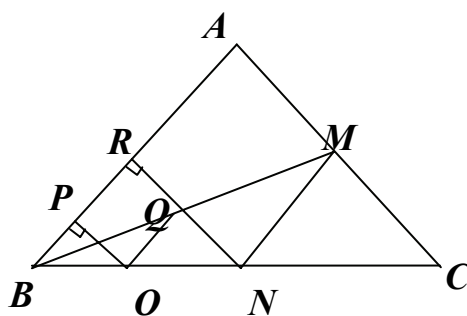
已知三角形 ABC 及 AC 邊上一點 M ，試求 BC 邊上一點 N ，使 N 點到 AB 邊和到 M 點的距離相等。



參考解答：

一、作法：

1. 作射線 $\overrightarrow{BM}$ 。
2. 在線段 AB 上任取一點 P 。並自 P 點作線段 AB 的垂線交 BC 邊上於 O 點。
3. 以 O 點為圓心， OP 線段長為半徑，交線段 BM 於 Q 點(交點可能有兩個取一個即可)。
4. 連接 OQ 。
5. 過 M 作 $\overline{MN}$ 使 $\overline{MN} \parallel \overline{OQ}$ ，並交 BC 邊上於 N ，即為所求



二、證明：

1. 自 N 點作線段 AB 的垂線 NR 交 AB 邊上於 R 點。
2. 由相似三角形可得， $\frac{\overline{MN}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{NR}}{\overline{OP}}$ 。
3. 因為 $\overline{OQ} = \overline{OP}$ ，所以 $\overline{MN} = \overline{NR}$ ，及得證 BC 邊上一點 N ，到 AB 邊和到 M 點的距離相等。

解答重點：

這是一個幾何的思考問題，題目需用到幾何的比例概念來作圖，詳細的作法與證明如上述。