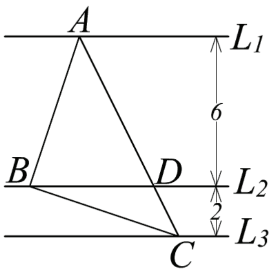
中學生通訊解題第五十期題目參考解答與評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號 5001

如圖，三直線 L_1, L_2, L_3 互相平行，

L_1與L_2距離為6，L_2與L_3距離為2，有一個等腰直角三角形 ABC，其中 A 點在 L_1 上，B 點在 L_2 上，C 點在 L_3 上，若 $\overline{AC}$交 L_2於 D，則 $\overline{BD}=?$



參考解答：

(1) 過 B 點作一直線垂直 L_2，分別交 L_1，L_3 於 E, F；過 C 點作一直線垂直 L_3，分別交 L_1, L_2於 G, H

(2) $\angle E = 90^\circ = \angle F, \overline{AB} = \overline{BC}$

$\angle FCB = \angle CBH = 90^\circ - \angle ABH$

$= 90^\circ - \angle EAB = \angle EBA$

所以 $\Delta ABE \cong BCF$（AA 相似）

(3) 由(2)得知：$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{HC} = 2$

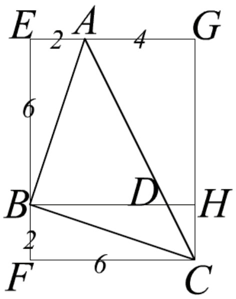
且 $\overline{EG} = \overline{BH} = \overline{FC} = \overline{EB} = 6$

(4) $\Delta CHD \sim \Delta CGA$（AA 相似）

$$\Rightarrow \frac{\overline{CH}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{GA}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CH}}{\overline{CH}+\overline{HG}} = \frac{\overline{BH}-\overline{BD}}{\overline{GE}-\overline{EA}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2+6} = \frac{6-\overline{BD}}{6-2} \Rightarrow \overline{BD} = 5$$



解題評註：

本題所給的訊息有：三個平行線、平行線之間的距離、等腰直角三角形。這些訊息很容易找到相似圖形、直角三角形等條件，其中相似三角形可以使用「邊長比」的性質，至於直角三角形則可以使用大家最熟悉的「畢氏定理」來進行解題。

問題編號 5002

若 $a>0, b>0$ 且 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$，則

$(\frac{b}{a})^3+(\frac{a}{b})^3=$?

參考解答：

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$ ，$\Rightarrow\frac{a+b}{a}-\frac{a+b}{b}=1\Rightarrow\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=1$

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\sqrt{\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)^2+4}=\sqrt{5}$$

$$\therefore\left(\frac{b}{a}\right)^3+\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}-1\right)$$

$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\left[\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2-3\right]$$

$$=\sqrt{5}\times(5-3)=2\sqrt{5}$$

問題編號
5002

求方程式 $x^2-xy+y^2+x-2y=0$ 的全部整數解。

參考解答：

[解法一]

將方程式看成 x 的一元二次方程式，原式變為 $x^2+(-y+1)x+(y^2-2y)=0$

欲使 x 有整數解，要先使其有實根，故

$D=(-y+1)^2-4(y^2-2y)\geq 0\Rightarrow 3y^2-6y-1\leq 0$

$\Rightarrow 1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\leq y\leq 1+\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ，

由於 y 為整數，故 y 只可能為 0,1,2，

逐一代回原式檢查可得

$(x,y)=(-1,0),(0,0),(-1,1),(1,1),(0,2),(1,2)$

共 6 組

[解法二]

將原式變為

$[x^2-x(y-1)+\frac{1}{4}(y-1)^2]+\frac{3}{4}y^2-\frac{3}{2}y-\frac{1}{4}=0$ ，

再配方可得 $[x-\frac{1}{2}(y-1)]^2+\frac{3}{4}(y-1)^2=1$ ，

移項後得 $[x-\frac{1}{2}(y-1)]^2=1-\frac{3}{4}(y-1)^2$ ，

由於 $[x-\frac{1}{2}(y-1)]^2\geq 0$ ，

則 $0\leq 1-\frac{3}{4}(y-1)^2\Rightarrow\frac{3}{4}(y-1)^2\leq 1$

$\Rightarrow(y-1)^2\leq\frac{4}{3}\Rightarrow 1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\leq y\leq 1+\frac{2}{3}\sqrt{3}$

由於 y 為整數，故 y 只可能為 0,1,2，

逐一代回原式檢查可得

$(x,y)=(-1,0),(0,0),(-1,1),(1,1),(0,2),(1,2)$

共 6 組

[解法三]

將原式先同乘以 2 倍，

得 $2x^2-2xy+2y^2+2x-4y=0$

再配方得 $(x-y)^2+(x+1)^2+(y-2)^2=5$

故由

$((x-y)^2,(x+1)^2,(y-2)^2)$

$=(01,4),(0,4,1),(1,0,4),(1,4,0),(4,1,0),(4,0,1)$

小心討論可得

$(x,y)=(-1,0),(0,0),(-1,1),(1,1),(0,2),(1,2)$

共 6 組

解題重點：

1. 方法一：利用整數根亦為實數根，故判別式 ≥ 0，得出整數根的範圍，再討論

所有可能解。

2. 方法一：配方法得完全平方式，再利用平方 ≥ 0 的特性，討論出整數根所有可能解。

問題編號
5004

設 a、b、c、d 均爲非負整數，且對所有大於 1 的數 x，$\dfrac{x^a}{(x-1)^b}=\dfrac{x^c}{(x-1)^d}+1$ 恆成立，則 a、b、c、d 中有幾個相等的數？

參考解答：

令 $x=2$，代入得 $2^a=2^c+1$　$\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$\because$ c 爲非負整數　$\therefore$ $2^c>0$，即 $2a-1>0$，但 $2a-1$ 爲奇數，由(1)知

$2a-1=1 \Rightarrow a=1$，$c=0$

令 $x=3$，代入得

$3=2^{b}(2^{-d}+1)=2^{b-d}+2^b$

若 $b>d$，則左式爲奇數，右式爲偶數(不合)；若 $b<d$，則左式爲整數，右式爲分數(不合)

$\therefore$ $b=d$ $\Rightarrow$ $3=2^0+2^b$，

故 $b=1$，$d=1 \Rightarrow a$、b、c、d 中有 3 個相等的數：$a=b=d$ 。

解題重點：

這是一個數論的基本題，很容易湊出答案。利用奇偶性或二項式定理詳細解答比較耗時，可由題幹中的"恆等式"下手較爲簡捷，詳解如上述。

問題編號
5005

在 1000, 1001, 1002, ..., 5000 中，兩個連續整數相加而不進位的整數對有多少對？

參考解答：

共 624 對。

考慮 1000~2000 中，在小於 1500 的連續整數對中，(1)相鄰個位數爲(0, 1)，(1, 2)，(2, 3)，(3, 4)，(4, 5)，而十位數爲 0, 1, 2, 3, 4 者，皆不進位；(2)相鄰個位數爲(9, 0)，而十位數爲(0, 1)，(1, 2)，(2, 3)，(3, 4)，(4, 5)，(9, 0)者，皆不進位。故 10xx 中連續整數相加而不進位的整數對有 $5\times5+1\times6=31$ 對，同理 11xx, 12xx, 13xx, 14xx 亦同；在大於 1500 的連續整數對中，只有 1999 和 2000 相加時不進位。所以在 1000 至 2000 中，共有 $31\times5+1=156$ 對，同理在 2000~3000, 3000~4000, 4000~5000 中亦同，故共有 $156\times4=624$ 對連續整數對相加而不進位。