

二位數乘法的速算—交叉簡化原則

林保平

臺北市立教育大學 數學資訊教育學系

壹、前言

去年有幸，得便到大陸旅遊一趟，有個晚上，與大家一同到夜市逛街，就在街上，發現一個攤位，不知賣些什麼。攤主弄了個小黑板，就在街上表演二位數數字的速算起來，蠻多觀眾對其表現，嘖嘖稱奇，不知他到底用了什麼規則。筆者記得大學剛畢業在國中教書時，就利用了速算來吸引學生學習的注意力及興趣，希望學生經由實例，看出某幾個速算規則，探究在何條件之下，可以使用這種規則，如下二例

$$\begin{array}{r} (1) \quad \begin{array}{ccccc} 74 & 58 & 43 & 95 & 31 \\ \times 76 & \times 52 & \times 47 & \times 95 & \times 39 \\ \hline 5624 & 3016 & 2021 & 9025 & 1209 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad \begin{array}{ccccc} 57 & 53 & 54 & 52 & 51 \\ \times 59 & \times 53 & \times 58 & \times 56 & \times 53 \\ \hline 3363 & 2809 & 3132 & 2912 & 2703 \end{array} \end{array}$$

並研究且說明（或用代數式證明）這些規則背後的數學原理。這兩個速算規則顯然有相通之處，但少有人認真探究它們之間是否有關係，它們是否有相同的來源。其實，它們只是簡化了乘法中交叉相乘部分的計算而已。

貳、乘法算則的基本原理

大家知道乘法的直式算則，只不過是利用位值原理、九九乘法及乘法對加法的分配律來做計算而已。乘法直式算則，依照位值排列，分解後如下圖左式。若不依位值排列，仿照多項式交叉相乘分解因式的列法，可列為下圖中式，(a)部分乘以 100 加上(b)部分乘以 10,再加上(c)部分即為所得結果。下圖右式是一般化的十字交乘表示法，假設第一個二位數的十位是 a ，個位是 b ，第二個二位數十位為 c 個位為 d ，則其結果為 $a*b*100+(a*d+b*c)*10+c*d$ ，

$\begin{array}{r} 38 \\ \times 56 \\ \hline 18 \\ 40 \\ \hline 2128 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} (a) & & (b) \\ 15 & \langle \begin{array}{c} 38 \\ 56 \\ \hline 18+40 \end{array} & 48 \\ & (c) & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} a*c & \langle \begin{array}{c} a \ b \\ c \ d \\ \hline a*d+b*c \end{array} & b*d \end{array}$
結果： $15*100+(18+40)*10+48$ 結果： $a*c*100+(a*d+b*c)*10+b*d$		

以代數算式計算實際就是 $(10a+b)*(10c+d)=100a*c+10(a*d+b*c)+b*d$ ，其中 a, b, c, d 為小於 10 的非負整數。

因此，基本的二位數乘法，約需要 4 個乘法，4 個加法。觀察上述算式，我們可以看出，(a)(b)(c)三部分在相加的時候會有重疊的部分，(b)的十位與(c)的個位(只看上中圖,其實是十位)，(a)的個位與(b)的十位，這些重疊，及相加時可能的進位，就是計算會比較複雜的原因，純心算不易執行，因為腦中需要較多的暫時記憶。

前一段所說的第一個乘法速算實例的規則其實不難，兩個二位數，若個位數之和為十，十位數相同，利用前述的代數算法，很容易看出速算的計算規則。設相同的十位為 a ，和為十的兩個個位分別為 c, d ，亦即 $c+d=10$ ，此時

$$\begin{aligned}(10a+b)*(10a+c) &= 100a*a + 10a*(b+c) + b*c \\ &= 100a*a + 100a + b*c \\ &= 100a*(a+1) + b*c\end{aligned}$$

由於 $b*c$ 的結果最多只有二位， $100a*(a+1)$ 的結果開始於百位，兩者不會有重疊的現象，因此，將 $b*c$ 的結果寫在個位及十位（需要時補零）， $a*(a+1)$ 的結果寫在百位開始的位置就好。寫成直式對照，用 $74*76$ 為例如下圖

$$\begin{array}{r} 7*(7+1) \\ \swarrow \\ 56 \end{array} \begin{array}{c} \langle 7 \ 4 \rangle \\ \langle 7 \ 6 \rangle \end{array} 24 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 7 \ 4 \\ \times 7 \ 6 \\ \hline 5 \ 6 \ 2 \ 4 \end{array}$$

觀察這個速算規則，其所以能簡化直式計算的原因是：簡化了交叉相乘部分的計算。對照圖中的說明，這個計算維持了

(b)部分的計算，改變了(a)部分的計算，而能夠如此是因為(c)部分（交叉相乘相加）的計算可以被簡化。事實上，許多速算規則，都是透過簡化這一部份計算而得到的。

叁、簡化乘法算則中的交叉相乘得到速算的規則

前圖右式的交叉相乘一般算式，若用橫式表示，就是 $(10a+b)(10c+d)=100a*c+10(a*d+b*c)+b*d$ 。若 $a*d+b*c$ 為 10 的倍數，乘法直式算則就可以簡化，因為此時 $10(a*d+b*c)$ 為 100 的倍數，設其為 $100N$ ，此時結果就是 $100(a*c+N)+bd$ ，由於 $(a*c+N)$ 與 $b*d$ 沒有疊合，只需將其並列就可以得到答案，如下例：

$$\begin{array}{r} 8 \begin{array}{c} \langle 4 \ 6 \rangle \\ \langle 2 \ 7 \rangle \end{array} 42 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 8+4 \begin{array}{c} \langle 46 \rangle \\ \langle 27 \rangle \end{array} 42 \\ 12 \quad 1242 \end{array}$$

其計算式是： $6 \times 7 = 42$ 記在十位及個位，交叉相乘相加得 40，將 $4 \times 2 = 8$ 加上 40 中的 4 得 12，記在千位及百位，結果就是 1242。

上述方法，其實就是許多乘法速算的根源，看似簡單，但其交叉相乘的心算部分，仍然需要測試，若結果個位不是零（其實是十位），此法就行不通了。因此，若能事先看出哪些乘數及被乘數相乘的交叉相乘部分為 10 的倍數（其實是 100 的倍數），計算就可以簡化了。

算式

$$(10a+b)(10c+d)=100a*c+10(a*d+b*c)+b*d$$

中，交叉相乘部分為 $a*d+b*c$ ，因此只要看資它是否為 10 的倍數即可。若 a,b,c,d 中有兩個數相等，則原式可以化成 $x(y+z)$ 的型態，其中 x 表示相同的數， y,z 表示另兩個數，它們的直式有如下型態，其中 y,z 位置是可以交換的。

$$\begin{array}{r} x \ y \\ x \ x \ z \end{array} \quad \begin{array}{r} x \ x \\ x \ y \ z \end{array} \quad \begin{array}{r} y \ z \\ x \ x \ x \end{array} \quad \begin{array}{r} y \ x \\ x \ z \ x \end{array}$$

這種型態的乘式，可以簡化算則，我們分類討論如下：

- (1) $y+z=10$ ，亦即「直式乘式中，有任一列（或行）數字相同，且另一列（或行）和為 10」。

此時，我們可利用前述方法將計算簡化為：（注意： x 表示 a,b,c,d 中相同的數）

$$\begin{array}{r} a*c+x \left\langle \begin{array}{c} a \ b \\ c \ d \end{array} \right\rangle b*d \\ \text{千位百位} \qquad \qquad \text{十位個位} \end{array}$$

其計算可描述為「十位數相乘再加相同的數，結果記在千位百位，個位數相乘，結果記在十位個位」。以下為幾個計算實例：

$$\begin{array}{r} 64+8 \left\langle \begin{array}{c} 8 \ 7 \\ 8 \ 3 \end{array} \right\rangle 21 \\ 7 \ 2 \ 2 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28+7 \left\langle \begin{array}{c} 7 \ 7 \\ 4 \ 6 \end{array} \right\rangle 42 \\ 3 \ 5 \ 4 \ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24+3 \left\langle \begin{array}{c} 4 \ 3 \\ 6 \ 3 \end{array} \right\rangle 9 \\ 2 \ 7 \ 0 \ 9 \end{array}$$

- (2) $y+z=5$, x 為偶數，亦即直式乘式中，有任一列（或行）數字相同為偶數，且另一列（或行）和為 5。因為

$$x(y+z) = \frac{x}{2} \cdot 2(y+z) = \frac{x}{2} \cdot 10 \text{ 是 } 10 \text{ 的}$$

倍數，所以計算可以簡化為

$$\begin{array}{r} a*c+\frac{x}{2} \left\langle \begin{array}{c} a \ b \\ c \ d \end{array} \right\rangle b*d \\ \text{千位百位} \qquad \qquad \text{十位個位} \end{array}$$

以下為計算實例

$$\begin{array}{r} 8 \div 2 \\ 16+4 \left\langle \begin{array}{c} 2 \ 3 \\ 8 \ 8 \end{array} \right\rangle 24 \\ 2 \ 0 \ 2 \ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \div 2 \\ 4+3 \left\langle \begin{array}{c} 1 \ 6 \\ 4 \ 6 \end{array} \right\rangle 36 \\ 7 \ 3 \ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \div 2 \\ 16+2 \left\langle \begin{array}{c} 4 \ 3 \\ 4 \ 2 \end{array} \right\rangle 6 \\ 1 \ 8 \ 0 \ 6 \end{array}$$

- (3) $y+z=15$, x 為偶數，亦即直式乘式中，有任一列（或行）數字相同為偶數，且另一列（或行）和為 15。此時

$$x(y+z) = \frac{3x}{2} \cdot \frac{2}{3}(y+z) = \frac{3x}{2} \cdot 10 \text{ 為 } 10$$

的倍數，計算可化簡為

$$\begin{array}{c} a*c + \frac{3x}{2} \langle \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \rangle b*d \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{千位百位} \quad \quad \quad \text{十位個位} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \frac{6+8}{2} \\ 48+7 \langle \begin{array}{cc} 8 & 5 \\ 6 & 5 \end{array} \rangle 25 \\ \hline 5 \quad 5 \quad 2 \quad 5 \end{array}$$

以下為計算實例

$$\begin{array}{c} 8 \times \frac{3}{2} \\ 64+12 \langle \begin{array}{cc} 8 & 6 \\ 8 & 9 \end{array} \rangle 54 \\ \hline 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 4 \times \frac{3}{2} \\ 56+6 \langle \begin{array}{cc} 7 & 4 \\ 8 & 4 \end{array} \rangle 16 \\ \hline 6 \quad 2 \quad 1 \quad 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 6 \times \frac{3}{2} \\ 48+9 \langle \begin{array}{cc} 6 & 6 \\ 8 & 7 \end{array} \rangle 42 \\ \hline 5 \quad 7 \quad 4 \quad 2 \end{array}$$

(4) $x=5, y+z$ 為偶數，直式乘式中，有任一列（或行）數字相同為 5，且另一列（或行）和為偶數。此時，

$$x(y+z) = 10 * \frac{y+z}{2} \text{ 為 } 10 \text{ 的倍數，計}$$

算可簡化為

$$\begin{array}{c} a*c + \frac{y+z}{2} \langle \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \rangle b*d \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{千位百位} \quad \quad \quad \text{十位個位} \end{array}$$

以下為計算實例

$$\begin{array}{c} \frac{7+1}{2} \\ 25+4 \langle \begin{array}{cc} 5 & 7 \\ 5 & 1 \end{array} \rangle 7 \\ \hline 2 \quad 9 \quad 0 \quad 7 \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{9+7}{2} \\ 35+8 \langle \begin{array}{cc} 5 & 5 \\ 7 & 9 \end{array} \rangle 45 \\ \hline 4 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \end{array}$$

肆、速算規則的推廣

前述的特殊二位數乘法速算規則，由於來源均為「簡化交乘」，他們的適用條件及計算方法都有相通之處，記憶較為簡便。許多網頁描述的速算規則都含蓋在我們的規則（1）中。例如

- “尾數為 5 的平方速算”（個位之和為 10 十位相同的乘法之特例）
 - “首數為 5 的平方速算”（兩首位和是 10，兩尾數相同之特例）
 - “個位之和為 10 十位相同的乘法”
 - “兩首位和是 10，兩尾數相同的兩位數相乘”
 - “一個數的個位、十位數字相同，另一個數個位、十位相加得十”的乘法
- 這些都合於我們規則（1）的條件，計算方法相通容易記得。但是規則(2)(3)(4)的運用就很少看到了。

簡化計算其實也有層次上的不同，例

如

- “十位相同的乘法”
- “個位之和為 10 的乘法”
- “個位相同的乘法”
- “十位數是 1 的兩位數相乘”
- “個位是 1 的兩位數相乘”
- “十位相同個位不同的兩位數相乘”

- “首位相同，尾數和不等於 10 的兩位數相乘”

等，都對「交乘」有簡化的作用，但因其條件只是我們條件的一部分，或本質上計算就較容易，所以簡化計算的程度較少，在此狀況下，與直接使用算則差異不大，似乎沒有必要再去記憶它們的規則，甚至熟練它們的算法。

我們的 4 個運算規則，其實也可以推廣到其他的狀況，例如十位數為零的兩個三位數相乘，如下例

$$\begin{array}{r} 64 \langle \begin{array}{cc} 8 & 0 \\ 8 & 0 \end{array} \rangle 21 \\ \hline 648021 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \langle \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 8 & 0 \end{array} \rangle 24 \\ \hline 164024 \\ \hline 8 \div 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \langle \begin{array}{cc} 7 & 0 \\ 8 & 0 \end{array} \rangle 16 \\ \hline 566016 \\ \hline 4 \times \frac{3}{2} \end{array}$$

它們背後的數學原理，不難推得。

伍、其他速算原理

有些速算，透過乘法公式及形式的改變來簡化交乘。例如

(1) 個位數之和為 10, 十位數差 1

設較大數的十位為 a , 個位為 b ,
故另一數十位為 $a-1$, 個位為 $10-b$,

$$\begin{aligned} (10a+b)(10(a-1)+(10-b)) &= (10a+b)(10a-b) \\ &= 100a^2 - b^2 \\ &= 100(a^2 - 1) + (100 - b^2) \end{aligned}$$

其計算方法如下圖所示：

$$\begin{array}{r} a(a-1)+a \\ \swarrow \quad \searrow \\ a^2-1 \quad \langle \begin{array}{cc} a & b \\ a-1 & 10-b \end{array} \rangle \quad 100-b^2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{千位百位} \quad \quad \quad \text{十位個位} \end{array}$$

計算時，只要看較大數的十位(a)及個位(b)就好, 其規則就是：將較大數十位的平方減去 1 為結果的千位及百位，將 100 減去個位數的平方為結果的十位及個位。

(2) 40 幾的平方

設此數個位為 b , 由於

$$\begin{aligned} (40+b)^2 &= 1600 + 80b + b^2 \\ &= 1600 - 100 + 100b + b^2 - 20b + 100 \\ &= 100(16-1+b) + (b-10)^2 \\ &= 100(15+b) + (10-b)^2 \end{aligned}$$

其計算方法如下圖所示：

$$\begin{array}{r} 16-1+b \\ \swarrow \quad \searrow \\ 15+b \quad \langle \begin{array}{cc} 4 & b \\ 4 & b \end{array} \rangle \quad (10-b)^2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{千位百位} \quad \quad \quad \text{十位個位} \end{array}$$

四十幾的平方計算規則為：15 加上個位數為結果的千位及百位，10 減去個位後，平方就是結果的十位及個位。以下為這兩個算法的實例：

$$\begin{array}{r} 82-1 \langle \begin{array}{cc} 7 & 4 \\ 8 & 6 \end{array} \rangle 100-36 \\ \hline 6364 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 15+7 \left\langle \begin{array}{c} 4 \quad 7 \\ 4 \quad 7 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} (10-7)^2 \\ 9 \end{array} \\
 \hline
 2 \quad 2 \quad 0 \quad 9
 \end{array}$$

陸、結論

本文探討二位數的乘法速算，從簡化交乘原則，建立了四類速算的判別及計算方法，並討論了一些推廣的法則，這個簡化交乘的方法，非常容易記得，從四個方位來看是否適用這個速算規則。將兩個二位數直式排列，成一方形，若任一列（或任一行）兩數相等，且另一列兩數的和為十（或和為五或十五，但相同數為偶數），即可利用這個速算方法。這個方法就是：

- (1) 兩數相等和為十時，第一行兩數相乘加上相同的數為結果的千位及百位，第二行的兩數相乘為結果的十位及個位。
- (2) 兩數相等和為五時，第一行兩數相乘加上相同的數的一半（除以 2）為結果的千位及百位，第二行的兩數相乘為結果的十位及個位。
- (3) 兩數相等和為十五時，第一行兩數相乘加上相同的數的二分之三（除以 2

乘以 3）為結果的千位及百位，第二行的兩數相乘為結果的十位及個位。

- (4) 同一行（或列）相等的數為 5，另一行（或列）和為偶數時，第一行兩數相乘加上和的一半為結果的千位及百位，第二行的兩數相乘為結果的十位及個位。

在數學的學習過程中，計算速度雖然十分重要，若只追求計算速度及計算的技巧，不知思考其計算方法的根源或原理，實是學習過程中的極大缺陷。作者認為若是需要計算速度，使用電算器就可以輕易獲得，何需多方追求，或做「過多」的計算練習？教學時，提供速算的技巧，目的不應是提升計算速度，而是提供機會讓學生思考，歸納有用的知識。二位數的乘法與國中多項式的分配律，多項式的乘法公式等，有相當大的關連，透過速算讓學生探索這些多項式乘積所造成的規則性，對學生思考的學習應有極大的幫助。讓國小學生，玩玩速算，不當作「必學必記」的內容，讓學生留下，「這個計算背後是有數學原理的」、「我將來要研究為什麼」的想法與印象，也是不錯的學習歷程。