中學生通訊解題第四十九期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
4901

已知正整數 a,b,c 滿足

$$a^2+b^2+c^2+42<ab+9b+8c，$$

求 a , b , c 的值。

參考解答：

$a^2+b^2+c^2+42 \;<\; ab+9b+8c$ ，

$a^2+b^2+c^2+43 \;\le\; ab+9b+8c$

即 $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}\left(b-6\right)^2+\left(c-4\right)^2=0$ ，

則 $a=3, b=6, c=4$

解題評注

答對者的解法中幾乎都是把原不等式直接配方，然後對 a、b、c 可能的直做通盤的討論而得出結果。這是同學們普遍的想法，然而就解答所提供的思考是由整數的次序性，再配合配方法就很容易看出 a、b、c 的值了。

問題編號
4902

設 n 為正奇數，證明:使等式

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$=p[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}]$$

成立的 p 必為整數。

參考解答：

【簡答】

$$p=\frac{n+1}{2}$$

【詳答】

1. 整理右式：

$$\because \quad \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$\therefore$ 右式=

$$\frac{p}{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\ldots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$$

$$=\frac{p}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{np}{2n+1}$$

2.整理左式：

[拆項法一]：

$$\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n^2}{4n^2-1}$$

$$=\frac{1}{4}[1+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}]$$

$$=\frac{1}{4}[1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$$

∴ 左式=

$$\frac{1}{4}[1+\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})]+\frac{1}{4}[1+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})]$$

$$+\ldots+\frac{1}{4}[1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$$

$$=\frac{1}{4}[n+\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1})]=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

[拆項法二]：

$$\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{n^2}{2n-1}-\frac{n^2}{2n+1})$$

∴ 左式=

$$\frac{1}{2}[\frac{1^2}{1}-\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{3}-\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{5}-\frac{3^2}{7}+\ldots+\frac{n^2}{2n-1}-\frac{n^2}{2n+1}]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1^2}{1}+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\ldots+\frac{n^2-(n-1)^2}{2n-1}-\frac{n^2}{2n+1}]$$

$$=\frac{1}{2}[n-\frac{n^2}{2n+1})]=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

[拆項法三]：

$$\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{(2-\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}$$

$$=\frac{1}{4}[\frac{1}{2-\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{1}{n}}]=\frac{1}{4}[\frac{n}{2n-1}+\frac{n}{2n+1}]$$

∴ 左式=

$$\frac{1}{4}[\frac{1}{1}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{2}{5}+\frac{3}{5})+\ldots+(\frac{n-1}{2n-1}+\frac{n}{2n-1})+\frac{n}{2n+1}]$$

$$=\frac{1}{4}[\underbrace{1+1+1+1\ldots+1}_{n\text{個}}+\frac{n}{2n+1}]=\frac{1}{4}[n+\frac{n}{2n+1}]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

[拆項法四]：

左式=

$$[\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}]$$

$$+3[\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}]$$

$$+5[\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}]$$

$$+\ldots+(2n-1)[\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}]$$

$$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1})+3(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1})+5(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1})$$

$$+\ldots+(2n-1)(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$$

$$=\frac{1}{2}[n-\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2n+1}]=\frac{1}{2}[n-\frac{n^2}{2n+1}]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

[拆項法五]：

$$\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}[\frac{n(n+1)}{2n+1}-\frac{n(n-1)}{2n-1}]$$

∴ 左式=

$$\frac{1}{2}[(\frac{2}{3}-0)+(\frac{6}{5}-\frac{2}{3})+...+(\frac{n(n+1)}{2n+1}-\frac{n(n-1)}{2n-1})]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

[數學歸納法]：

先代數字觀察出左式

$$=\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+...+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

，再利用數學歸納法證明

(1) 觀察部份略

(2) 1. 當 n=1 時，$\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}$ 原式成立

2. 設 n=k 時原式成立，即

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+...+\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

3. 當 n=k+1 時，

$$[\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+...+\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}]+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)\cdot(2k+3)}$$

$$=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)\cdot(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)}{2(2k+1)\cdot(2k+3)}[k(2k+3)+2(k+1)]$$

$$=\frac{(k+1)}{2(2k+1)\cdot(2k+3)}(2k+1)(k+2)$$

$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$ 原式成立，故由數學歸納法得證。

3. 因此 $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}=\frac{np}{2n+1} \Rightarrow p=\frac{n+1}{2}$

由於 n 為正奇數，故 p 必為整數。

解題重點：

1. 方法一：分式級數拆項及對消的運用。
2. 方法二：觀察級數一般式，再利用數學歸納法證明猜測結果正確。
3. 本題除拆項法五為參考答案外，其餘各拆項法及數學歸納法為參與徵答同學所提供之作法。

問題編號 4903

甲、乙兩人輪流在 11×11 的方格表中放棋子，每人每次只能放一個棋子。
甲先開始，可以將棋子放在任何一個這樣的空格中：該格所在的行與列中已經被放棋子的總數為偶數；乙後放棋子，必須將棋子放在任何一個這樣的空格中：該格所在的行與列中已經被放棋子的總數為奇數。誰不能再放入棋子，就算誰輸。請問：誰有必勝策略？

參考解答：

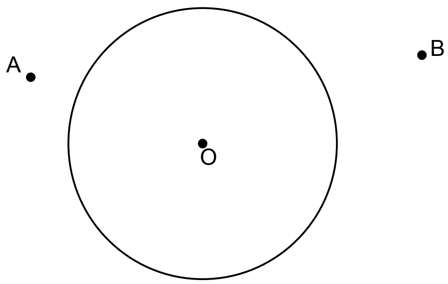
甲有必勝策略！
先佔領中心方格 A，然後採用對稱策略：
若乙在中心列某方格 B 放棋子，甲就在中心列上關於 A 與 B 對稱的方格 B′ 中放棋子。
若乙在中心列以外的某方格 C 放棋子，甲就在關於中心列與 C 對稱的方格 C′ 中放棋子。

解題評注：

本題作法只需說明依照策略，乙下完棋子之後，甲必定可再繼續下，再加上棋盤數爲奇數即可得到結論。

問題編號
4904

已知圓 O 和兩點 A、B，求作圓 O 的直徑 $\overline{PQ}$，使 $\overline{AP}=\overline{BQ}$



參考解答：

作法：

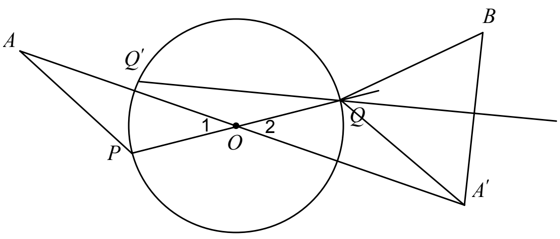
1. 在 $\overrightarrow{AO}$ 上取一點 A'，使 $\overline{AO}=\overline{OA'}$
2. 作 $\overline{A'B}$ 之中垂線，交圓 O 於 Q(與 Q')
3. 連 $\overleftrightarrow{OQ}$ 交圓 O 於 P，則 $\overline{PQ}$ 即爲所求

證明：

$\because$ $\overline{AO}=\overline{OA'}$ ，$\overline{OP}=\overline{OQ}$ ，$\angle 1=\angle 2$

$\therefore \triangle AOP \cong \triangle A'OQ$ (SAS 性質)

$\Rightarrow \overline{AP}=\overline{A'Q}=\overline{BQ}$



解題重點：

這是一個對稱性概念的作圖題，作 A 或 B 關於圓心 O 的稱點都可以。詳細的作法與證明如上述。

問題編號
4905

$(367^{367}+762^{762})\times 123^{123}$ 的個位數爲？

參考解答：

$7^1 \to 7$，$7^2 \to 9$，$7^3 \to 3$，$7^4 \to 1$

$\Rightarrow$ 四循環；而 367÷4 餘 3

$\therefore$ 367^{367} 的個位數爲 3

$2^1 \to 2$，$2^2 \to 4$，$2^3 \to 8$，$2^4 \to 6$

$\Rightarrow$ 四循環；而 762÷4 餘 2

$\therefore$ 762^{762} 的個位數爲 4

$3^1 \to 3$，$3^2 \to 9$，$3^3 \to 7$，$3^4 \to 1$

$\Rightarrow$ 四循環；而 123÷4 餘 3

$\therefore$ 762^{762} 的個位數爲 7

$\Rightarrow$（$367^{367}+762^{762}$）$\times 123^{123}$

$\Rightarrow$（3＋4）×7=49

$\therefore$ 的個位數爲 9

解題重點：

這是一個數論的基本題，很容易湊出答案。詳細的作法與證明如上述。