和平號太空站頻譜艙上的破洞大小

蔡尚芳

私立吳鳳技術學院 電機工程系

摘　要

1997 年 6 月 25 日，和平號太空站在與進步 M34 號運貨太空船進行遙控泊接作業時，意外發生碰撞，太空站上的頻譜艙受創，因此造成艙室內的空氣外漏，導致艙壓下降，在 8 分鐘內從 750 毫米汞柱下降到 675 毫米汞柱。

本文由熱力學的觀點，考慮流體的可壓縮性，利用氣體在絕熱狀態下所適用的白努利方程式，推導出氣體漏出速率的公式，並提出一個模型，從而由艙壓下降的時間與頻譜艙的相關資料，估算出頻譜艙上破洞面積的上限約為 562 mm^2，與報導的破洞面積 300 mm^2 大致相稱。

前言

白努利方程式是處理穩定態流體運動非常重要的一個公式，基本上它是流體系統的功-能定理，所表達的是流體在同一條流線上的能量守恆關係。在一般的高中物理與大學普通物理學教材中，都只從力學的觀點，針對不可壓縮的液體在絕熱狀態下的穩流，說明白努利方程式所具有的形式及其應用。如果討論的是可壓縮的氣體時，此方程式是否需要修正，則甚少有書費事加以交代。因此，本文首先將從熱力學的觀點，討論在絕熱情況下，理想氣體所遵守的白努利方程式，究竟與不可壓縮的液體有何不同。

為了說明這個方程式的應用，本文將討論國內高中學生物理競賽考試曾經出現過的一些題目，其中有一個是關於氣體在噴嘴出口的速率公式，取材自我國 2003 年國際及亞洲物理奧林匹亞競賽國家代表隊的決選考試；另外一個則取材自 2006 年 11 月 11 日舉行的我國 2007 年國際及亞洲物理奧林匹亞競賽國家代表隊的初選考試，原題以計算題的形式，提示學生利用白努利方程式，估算和平號太空站上的頻譜艙被撞出的破洞大小，它一方面能與學生平常生活中的見聞結合，另一方面又可彰顯物理知識在解決問題上的實用價值，是相當富有創意、啓發性及挑戰性的一道題目。不過在公佈的參考解答中，使用的是絕熱狀態下不可壓縮流體的白努利方程式，這點與本文所用的理論模型與結論是有所不同的。

壹、絕熱水平穩流適用的白努利方程式

考慮一水平穩流，在絕熱與無摩擦損

耗下，通過如圖 1 所示之噴嘴。設流體之壓力、速率、質量密度、截面積，在進口 A_2 處分別爲 p_1、v_1、ρ_1、A_1，而在出口處爲 p_2、v_2、ρ_2、A_2。以下先說明此流體所適用的白努利方程式。

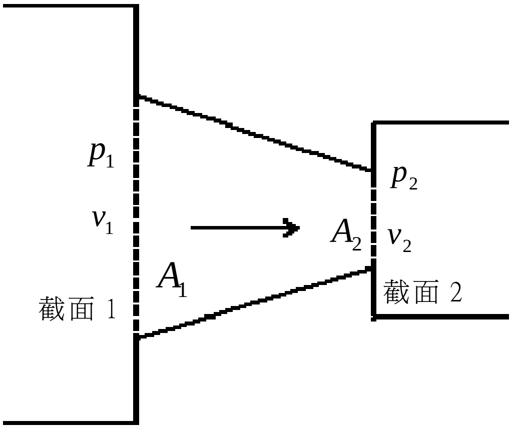

圖 1、通過絕熱噴嘴之氣體穩流

假設此穩流在 Δt 時間內流入截面 1 之體積爲 ΔV_1，流出截面 2 之體積爲 ΔV_2，則流入截面 1 與流出截面 2 之質量相等，均爲 $\Delta m = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_2 \Delta V_2$，而靜液壓力 $p_1 A_1$ 與 $p_2 A_2$ 對 Δm 之流體所做之功 ΔW 爲

$$\begin{aligned} \Delta W &= p_1 A_1 (v_1 \Delta t) - p_2 A_2 (v_2 \Delta t) \\ &= p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2 \\ &= \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) \Delta m \end{aligned} \tag{1}$$

若以 u 代表流體每單位質量之內能，並假設流體由截面 1 流動到截面 2 爲絕熱過程，則根據熱力學第一定律，對質量爲 Δm 之流體所做之功 ΔW 須等於其增加之能量 ΔE，即 $\Delta W = \Delta E$。因總能量爲內能、動能與位能之和，而水平穩流的重力位能變化爲零，故

$$\Delta E = (u_2 - u_1)\Delta m + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)\Delta m \tag{2}$$

由(1)式與(2)式得如下之能量關係式：

$$\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} = u_2 - u_1 + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \tag{3}$$

上式即爲絕熱水平穩流的「白努利方程式」。在力學中，因爲只考慮功與力學能(即動能與位能)之間的關係，故上式中的內能變化項不會出現，但本文討論的流體是氣體，內能的變化顯然是不能忽略的。

貳、理想氣體方程式

若一氣體之絕對溫度爲 T，體積爲 V，壓力爲 p，莫耳數爲 n，質量密度爲 ρ，分子質量(即每莫耳之質量)爲 M，則由理想氣體方程式得

$$RT = \left(\frac{V}{n}\right)p = M\left(\frac{V}{nM}\right)p = M\frac{p}{\rho} \tag{4}$$

在上式中，R 爲理想氣體常數。由(4)式，可知流經圖 1 中截面 1 與 2 的氣體，具有以下的關係：

$$\frac{R}{M}(T_1 - T_2) = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \tag{5}$$

假設理想氣體之莫耳定壓比熱爲 c_P，莫耳定容比熱爲 c_V，兩者之比爲 γ，即 $\gamma = c_P / c_V$，則可得

$$c_P - c_V = (\gamma - 1)c_V = R \tag{6}$$

由熱力學第一定律(或氣體分子動力

論)可得內能與絕對溫度的關係爲

$$u_2 - u_1 = \frac{c_V}{M}(T_2 - T_1) \qquad (7)$$

利用(6)式與(5)式，可將(7)式之結果改寫爲

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= \frac{R}{(\gamma-1)M}(T_2 - T_1) \\ &= \frac{1}{(\gamma-1)}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) \end{aligned} \qquad (8)$$

參、理想氣體穩流在出口之速率

由(3)式與(8)式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) &= \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) - (u_2 - u_1) \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) \end{aligned} \qquad (9)$$

當氣體流動可視爲爲絕熱過程時，氣體壓力與密度需滿足以下關係：

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma} \qquad (10)$$

故由(9)、(10)兩式可得每單位質量之氣體在出口處與進口處之動能差爲

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) &= \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{p_1}{\rho_1}\left\{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\right\} \\ &= \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{p_1}{\rho_1}\left\{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\} \end{aligned} \qquad (11)$$

假設氣體在進口處之速率爲零(即 $v_1 = 0$)，或在進口處與出口處之速率比 v_1/v_2 遠小於 1，則由上式得氣體在出口之速率爲

$$v_2 \cong \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{p_1}{\rho_1}\left\{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}} \qquad (12)$$

肆、質量之流失率

假設艙內氣體之質量流失率(亦即每單位時間通過出口截面 2 之氣體質量)爲 ϕ_2，則

$$\phi_2 = A_2 \rho_2 v_2 \qquad (13)$$

當速率的比 v_1/v_2 遠小於 1 時，由上式、(4)式與(10)式得

$$\begin{aligned} \phi_2 &= A_2\sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)(\rho_1 p_1)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2\left\{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}} \\ &= \rho_1 A_2\sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{RT_1}{M}\left\{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right\}} \end{aligned} \qquad (14)$$

注意：上式中之截面 2，實際上亦可代表進口截面 1 到出口截面 2 間之任何截面，故可將上式中之下標 2 省略而得在截面積爲 A 處($A_1 > A \geq A_2$)之質量流失率 ϕ，且各個截面之 ϕ 均與質量流失率 ϕ_2 相等，即

$$\phi = \rho_1 A\sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{RT_1}{M}\left\{\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right\}} \qquad (15)$$

假設當壓力 $p = p_c$ 時，每單位面積之質量流失率 ϕ/A 達極大值，則由 ϕ/A 對壓力 p 之微分爲零可得

$$2\left(\frac{p_c}{p_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - (\gamma+1)\left(\frac{p_c}{p_1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} = 0 \qquad (16)$$

亦即

$$\frac{p_c}{p_1}=(\frac{2}{\gamma+1})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (17)$$

若氣體為空氣，則 $\gamma=1.4$，故 $p_c=0.53p_1$。此一結果顯示，當氣體由太空艙內部(壓力為 p_1)洩漏到近乎真空之艙外(壓力 p_2 遠小於 p_1)時，其壓力在到達艙壁之裂縫口(截面 2)前，會在艙壁或艙內某一截面(其截面積以 A_c 表示，$A_c>A_2$)下降至壓力 p_c，而具有最大之單位面積質量流失率。

因穩流時質量流失率到處相同，故我們可將壓力為 p_c 處之質量流失率 ϕ_c，當作太空艙經洞口洩漏到艙外的氣體質量流失率 ϕ_2。由(15)與(17)式可得

$$\phi_c=\rho_1A_c\sqrt{(\frac{2\gamma}{\gamma-1})\frac{RT_1}{M}\{(\frac{2}{\gamma+1})^{\frac{2}{\gamma}}-(\frac{2}{\gamma+1})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\}} \quad (18)$$

當氣體為空氣時($\gamma=1.4$)，上式成為

$$\phi_c=0.369\rho_1A_c\sqrt{\frac{2RT_1}{M}} \quad (19)$$

而當氣體為理想氣體時($\gamma=5/3$)，則為

$$\phi_c=0.438\rho_1A_c\sqrt{\frac{2RT_1}{M}} \quad (20)$$

伍、頻譜艙上破洞的面積

依據 2007 年我國國際及亞洲物理奧林匹亞競賽國家代表隊初選考試原題所給的數據，太空艙的體積 $V_0=390\ \mathrm{m}^3$，溫度固定為 $T_1=297\ \mathrm{K}$，在 8 分鐘內因艙內空氣外漏導致艙壓由 750 mmHg 下降至 675 mmHg (NASA, 1997)。注意：此與遼沈晚報(1999)所報導的由 760 mmHg 下降到 690 mmHg，稍有不同。

假設太空艙內近乎靜止(即 $v_1\cong 0$)的空氣質量為 m_1，體積為 V_1，則由(4)式可得

$$p_1=(\frac{RT_1}{M})\rho_1=(\frac{RT_1}{M})\frac{m_1}{V_1} \quad (21)$$

因艙內空氣之溫度與體積均為固定，而在 dt 時間內減少之質量 dm_1 為 $(-\phi_c dt)$，故得

$$\frac{dp_1}{p_1}=\frac{d\rho_1}{\rho_1}=\frac{dm_1}{m_1}=-\frac{\phi_c dt}{\rho_1V_1} \quad (22)$$

將(19)式之結果代入上式可得

$$\frac{dp_1}{p_1}=-\frac{0.369A_c}{V_1}\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}dt=-\lambda\,dt \quad (23)$$

上式中之 λ 為常數，其定義依(22)與(23)式為

$$\lambda=\frac{\phi_c}{\rho_1V_1}=\frac{0.369A_c}{V_1}\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}$$

$$=\frac{0.522\,A_c}{V_1}\sqrt{\frac{RT_1}{M}} \quad (24)$$

將(23)式積分後可得

$$p_1(t)=p_1(0)\exp(-\lambda t) \quad (25)$$

即

$$\lambda=\frac{1}{t}\ln\frac{p_1(0)}{p_1(t)}=\frac{1}{8\times 60}\ln(\frac{750}{675})\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$=2.20\times 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1} \quad (26)$$

因空氣之分子質量 $M=28.8\ \mathrm{g/mol}$，而太空艙內近乎靜止之空氣的體積 V_1 應小

於太空艙的體積 V_0，但如破洞夠小，則可將艙內大部分的氣體視爲處於靜止平衡態，故此二體積應相當接近，即 $V_1 \cong V_0 = 390\ \mathrm{m}^3$。將上式之結果與已知資料代入(24)式可得

$$A_c = \frac{\lambda V_1}{0.522}\sqrt{\frac{M}{RT_1}} \cong \frac{\lambda V_0}{0.522}\sqrt{\frac{M}{RT_1}}$$
$$= \frac{2.20 \times 390}{0.522}\sqrt{\frac{28.8 \times 10^{-3}}{8.31 \times 297}}\ \mathrm{cm}^2 \qquad (27)$$
$$= 562\ \mathrm{mm}^2$$

以上估算之面積 A_c 爲頻譜艙上破洞面積 A_2 的上限，且因實際上 $V_1 < V_0$，故此上限必屬高估值。總結以上所述，洞口面積 A_2 應小於 $562\ \mathrm{mm}^2$，此與媒體(中國中央電視台，2001；Cable News Network, 1997)報導之洞口面積 $300\ \mathrm{mm}^2$，或洞口直徑約 2~3 cm (SpaceViews News, 1997)，可算是相稱的。

陸、討論

由以上的模型與理論分析可以看出，根據所給有關太空艙的資料，實際上只能獲得頻譜艙上破洞面積的上限值，但無法明確的推算出破洞本身的面積大小。

由(27)式可看出破洞面積的上限值，會與所用近乎靜止之空氣的體積 V_1 成正比，這個體積不容易清楚界定，因此除了模型固有的限制外，應是整個估算值最主要的誤差來源，而以太空艙體積 V_0 當作艙內近乎靜止之空氣的體積 V_1，也使以上估算所得的上限值，必然偏向高估。

另外一個可以用來估計太空艙破洞面積的方法，出現於 1998 年高中資優生直升大學的物理性向測驗。試題中假設加壓太空艙內部的氣體爲均勻分佈，且可當作是定溫的理想氣體。若太空艙內的氣體體積爲 V，分子個數爲 N，熱運動的平均速率爲 v，艙壁上小洞口的面積爲 A，則由氣體動力論，艙壁上每單位面積於單位時間內受到爲數 $vN/(4V)$ 個的氣體分子撞擊(Sears,1950, p.205)。假設這些氣體分子均由洞口逸出，則每單位時間內由洞口逸出的氣體分子個數爲

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{4}\left(\frac{N}{V}\right)Av \qquad (28)$$

若艙內氣體可視爲理想氣體，則由(4)式可得氣體壓力 p 與絕對溫度 T 的關係爲

$$p = \frac{NkT}{V} \qquad (29)$$

上式中 k 爲波茲曼常數。因溫度與體積固定不變，故得

$$\frac{dp}{p} = \frac{dN}{N} = -\frac{Av}{4V}dt = -\lambda\, dt \qquad (30)$$

將熱運動的平均速率 $v = \sqrt{3RT/M}$ (Sears,1950, p.231)代入上式可得

$$\lambda = \frac{A}{4V}\sqrt{\frac{3RT}{M}} = \frac{0.433A}{V}\sqrt{\frac{RT}{M}} \qquad (31)$$

仿照(25)至(27)式的推理，可得

$$A = \frac{\lambda V}{0.433}\sqrt{\frac{M}{RT}}$$
$$= \frac{2.20 \times 390}{0.433}\sqrt{\frac{28.8 \times 10^{-3}}{8.31 \times 297}}\ \mathrm{cm}^2 \qquad (32)$$
$$= 677\ \mathrm{mm}^2$$

即頻譜艙上破洞的面積爲 677 mm^2，比起本文前面一節所估算的上限 562 mm^2 還大。由於算出的破洞半徑，遠較空氣分子的平均自由行程爲大，故空氣分子經由洞口流出的質量損失，必須納入考慮，因此這樣的估算方式，並不可靠。

參考文獻：

中國中央電視台："和平號"空間站大事記(1996-今)。2001 年 03 月 22 日 16:47。取自 http://www.cctv.com.cn/news/special/zt1/heping/3546.html

遼沈晚報，四通利方 新浪網：中國太空人登九重天指日可待。1999 年 11 月 26 日 02:25。取自 http://news.sina.com.cn/china/1999-11-26/35314.html

Cable News Network, Inc. (1997), *Mir at half power after collision*, June 25, 1997, from http://www.cnn.com/TECH/9706/25/mir.collision.4p/index.html.

NASA Marshall Space Flight Center (1997), Status Report: *Progress Collides with Mir*, June 25, 1997, from http://liftoff.msfc.nasa.gov/RSA/collision.html.

Sears F. W. (1950). *An introduction to thermodynamics, the kinetic theory of gases, and statistical mechanics*, Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, Mass.

SpaceViews News (1997): Special Report: Progress/Mir Collision: *Progress Spacecraft Collides with Mir, Depressurizes Module*, July 1997, from http://www.seds.org/spaceviews/9707/news.html