中學生通訊解題第四十七期題目參考解答與評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
4701

設對於任何整數 x 而言，ax^3+bx^2+cx+d 都能被 5 整除，試問 a，b，c，d 中有哪些能被 5 整除？

參考解答：

令 $x=0$，1，-1，2 代入得

d 能被 5 整除

$a+b+c+d$ 能被 5 整除

$-a+b-c+d$ 能被 5 整除

$8a+4b+2c+d$ 能被 5 整除

由上可得

$a+b+c$ 能被 5 整除

$-a+b+c$ 能被 5 整除

$3a+4b+2c$ 能被 5 整除

又得 $2b$ 能被 5 整除，即 b 能被 5 整除

故 $a+c$ 能被 5 整除

$3a+2c$ 能被 5 整除

得 a 能被 5 整除

c 能被 5 整除

解題評析：

本題主要是代特殊數值，使能一一證明 a、b、c、d 皆為 5 的倍數。

問題編號
4702

有 2006 個盒子，每個盒子均放入 1 個球，球的顏色可能是白色或是黑色，且已知這 2006 個球共有偶數個白球。現允許你指著 2 個盒子詢問：「它們中是否至少有 1 個放的是白球？」，試問：最少需要詢問幾次，你就可以確定出 2 個盒子中放的都是白球。

參考解答：

4009 次。

將盒子編號為 1 , 2 , …… , 2006，

(1) 我們先證明詢問 4009 次後，可以確定哪 2 個盒中是白球：依次詢問 (1, 2)、(1, 3)、……、(1, 2006)、(2, 3)、(2, 4)、……、(2, 2006)。 ① 如果答案都是肯定的，則 1 號球與 2 號球都是白色的（原因是若 1 號球是黑色的，因這 2006 個球有偶數個白球，那麼就可以找到 1 個黑球與 1 號黑球配成一對，使得詢問的問題答案是否定的） ②如果答案中至少有一個是否定的（不妨假設是包含 1 號球的問題），那麼 1 號球是黑色的，此時(1, 2)、(1, 3)、……、(1, 2006)的詢問中，凡是答

案是肯定的，則另一個必爲白色的，如此一來，我們可以找到所有的白球。

(2) 其次證明，不能少於 4009 次的詢問：假設存在某種方案可以用更少的詢問來確保一定可以找到 2 個白球，此時最多在 4008 次的詢問之後，我們就必須指出哪 2 個是白球，不妨假設指出的是 1 號球與 2 號球爲白色的。但因爲只詢問了 4008 次，則必有形如$(1,n)$或$(2,n)$沒有詢問到，假設是$(1,k)$沒有詢問到，今假如在 1 號與 k 號盒子中放的是黑球，其他所有的盒子均放白球，那麼之前所問的 4008 個詢問答案全都是肯定的，但是所指的 1 號球與 2 號球爲白色是錯誤的。

解題評註：

回答這題的同學基本上都誤會了題意，或是用了下面的方法：

① 先檢驗 (1,2)、(3,4)、(5,6)、…、(2005,2006)

② 上述問題的答案最少有兩組是肯定的（若只有一組，則可那組的兩球均是白色的；當然也有可能這 1003 組的答案均是肯定的），不妨假設(1,2)至少有一個是白球，(3,4)至少有一個是白球。同學以爲再檢驗(1,3)、(1,4)、(2,3)、(2,4)即可確認哪 2 球是白色。

事實上，在①的檢驗中答案是肯定的可能有 1~1003 組，②的討論中若確定只有 2 組是肯定的（其他 1001 組是否定的），那麼這檢驗是有意義的。舉下列例子：

(A) 編號 1 與編號 95 是黑球其餘是白球

(B) 編號 2 與編號 95 是黑球其餘是白球

(C) 編號 3 與編號 95 是黑球其餘是白球

(D) 編號 4 與編號 95 是黑球其餘是白球

在①的檢驗中上述 4 種情形答案均有 1003 組是肯定的，此時要選哪一組繼續檢驗呢？當你選擇(1,2)、(3,4)檢驗以爲可以得到結論時，可是就算你檢驗完(1,3)、(1,4)、(2,3)、(2,4)後發覺，這些檢驗答案均是肯定的，但是哪兩個是白色的呢？

這是幾乎所有回答這題的同學一起的盲點。

問題編號
4703

$a,b,c,d\in N, 1\le a\le b\le c\le d\le 20,$
$b-a>2, c-b>2, d-c>2$
(a,b,c,d) 共有幾組解？

參考解答：

可視爲方程式

$(\square_0)+a+(\square_1)+b+(\square_2)+c+(\square_3)+d+(\square_4)=20$，

而 $(\square_0), a, (\square_1), b, (\square_2), c, (\square_3), d, (\square_4)$ 皆爲火柴棒，共有 20 根，其中

$(\square_0)\ge 0, a=1, (\square_1)\ge 2, b=1, (\square_2)\ge 2, c=1,$
$(\square_3)\ge 2, d=1, (\square_4)\ge 0$

$\therefore (\square_0)+(\square_1)+(\square_2)+(\square_3)+(\square_4)=16$

$\Rightarrow (\square_0)+(\square_1)'+(\square_2)'+(\square_3)'+(\square_4)=16-6=10$

$10+0+0+0+0\to(5)$，$9+1+0+0+0\to \dfrac{5!}{3!}=20$，

$8+2+0+0+0 \to \dfrac{5!}{3!}=20$，

$8+1+1+0+0 \to \dfrac{5!}{2!2!}=30$，

$73000 \to \dfrac{5!}{3!}=20$，$72100 \to \dfrac{5!}{2!}=60$，

$71110 \to \dfrac{5!}{3!}=20$，$64000 \to \dfrac{5!}{3!}=20$，

$63100 \to \dfrac{5!}{2!}=60$，$62200 \to \dfrac{5!}{2!2!}=30$，

$62110 \to \dfrac{5!}{2!}=60$，$61111 \to 5$，

$55000 \to \dfrac{5!}{3!2!}=10$，$54100 \to \dfrac{5!}{2!}=60$，

$53200 \to 60$，$53110 \to 60$，$52210 \to 60$，

$52111 \to 20$，$44200 \to 30$，$44110 \to 30$，

$43300 \to 30$，$43210 \to 120$，$43111 \to 20$，

$42220 \to 20$，$42211 \to 30$，$33310 \to 20$，

$33220 \to 30$，$33211 \to 30$，$32221 \to 20$，

$22222 \to 1$

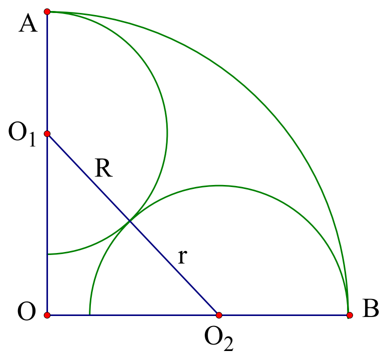
$\therefore$共有 $H_{10}^{5}=C_{10}^{14}=C_{4}^{14}=\dfrac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{24}=1001$

問題編號 4704

扇形 OAB 是單位圓的四分之一，半圓 O_1 的圓心 O_1 在 OA 上，並與 $\overset{\frown}{AB}$ 內切於點 A，半圓 O_2 的圓心 O_2 在 OB 上，並與 $\overset{\frown}{AB}$ 內切於點 B，半圓 O_1 與半圓 O_2 相外切，設兩圓的半徑和爲 x，面積之和爲 y：

（1）求 x 與 y 的關係；

（2）求 y 的最小值。



參考解答：

(1) 因 $\overline{OO_1}=1-R, \overline{OO_2}=1-r$,

得 $(1-r)^2+(1-R)^2=(R+r)^2$

$\Rightarrow Rr+R+r=1$

$\Rightarrow Rr=1-x$

故 $y=\frac{1}{2}\pi(R^2+r^2)=\frac{1}{2}\pi((R+r)^2-2Rr)$

$=\frac{1}{2}\pi(x^2-2(1-x))=\frac{1}{2}\pi(x^2+2x-2)$

(2) 由 $(1-R)+(1-r)>R+r$

$\Rightarrow 2-x>x$

$\Rightarrow 1>x$

又 $x=R+r\ge 2\sqrt{Rr}=2\sqrt{1-x}$

$\Rightarrow x^2\ge 4(1-x)$

$\Rightarrow x^2+4x-4\ge 0$

$\Rightarrow x\ge 2\sqrt{2}-2$ 或 $x\le -2\sqrt{2}-2$ (不合)

$\Rightarrow x\ge 2\sqrt{2}-2$

綜上得 $2\sqrt{2}-2\le x<1$

當 $x=2\sqrt{2}-2$ 時，

$y=\frac{1}{2}\pi(x^2+2x-2)=\frac{1}{2}\pi((x+1)^2-3)$

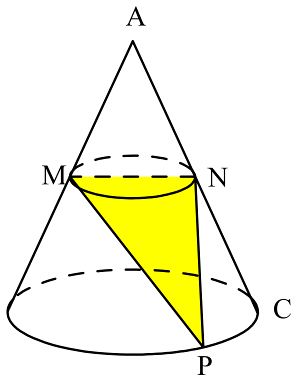
有最小值 $3-2\sqrt{2}$

解題評註：

本題主要利用商高定理求出關係，再利用算幾不等式求極值產生之處。

問題編號
4705

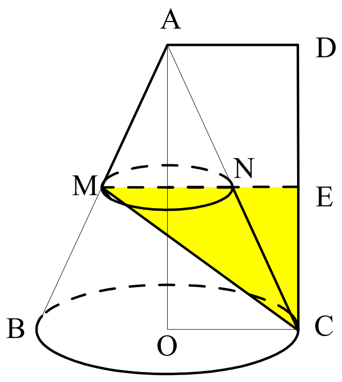
有一個圓錐體（如圖），$\overline{AB}=6$、底面的圓半徑為 2，M,N 分別是 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的中點。其中 P 是底面圓周上的一個動點，求(1) $\overline{MP}$ 的最大值，(2) ΔMPN 面積的最大值。



參考解答：

設 O 為底面圓的圓心，

$\overline{AD}\perp\overline{AO},\overline{DC}\perp\overline{OC},E$ 是 $\overline{DC}$ 中點。



(1) 當 P 在 C 點上時 $\overline{MP}$ 有最大值。

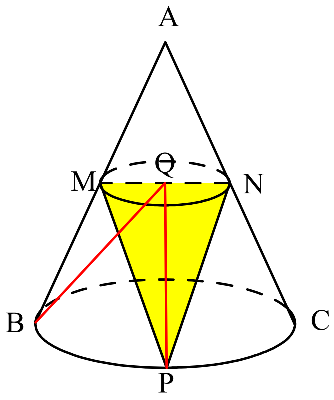
$$\overline{AO}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$$

$$\overline{EC}=\frac{1}{2}\overline{DC}=\frac{1}{2}\overline{AO}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{ME}=\overline{MN}+\overline{NE}=\overline{OC}+\frac{1}{2}\overline{AD}$$

$$=\overline{OC}+\frac{1}{2}\overline{OC}=2+1=3$$

$$\overline{MP}=\overline{MC}=\sqrt{\overline{ME}^2+\overline{EC}^2}=\sqrt{9+8}=\sqrt{17}$$



(2) 當 P 在 $\overset{\frown}{BC}$上的中點時，ΔMPN 有最大面積。 設 Q 為 $\overline{MN}$ 中點

$$\Rightarrow\ \overline{QP}=\overline{QB}=\sqrt{\overline{QO}^2+\overline{BO}^2}$$

$$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\ \Delta MPN=\frac{1}{2}\overline{MN}\times\overline{QP}$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

解題評註：

本題屬於空間幾何的題目類型，重點在如何掌握動點的位置。