
小數乘法的學與教

劉曼麗^{1*} 侯淑芬²

¹國立屏東教育大學 數理教育研究所

²高雄市立十全國民小學

壹、前言

在「學生的小數概念」(劉曼麗, 2005)一文中, 我們探討了學生對一位純小數的意義、一位帶小數的意義、小數與分數的互換、不同位數的小數比大小和小數加減的理解情形。而在「小數的教學活動」(劉曼麗和侯淑芬, 2005)一文中, 我們則探討了一位純小數、一位帶小數和小數加減的教學活動。接著, 我們將繼續關注在另外一個重要的主題—小數的乘除法。

小數乘除法是小數基本計算中的重要一環, 也是九年一貫數學領域課程綱要中明確指出學生應在小學畢業前熟練的部份(教育部, 2003), 其重要性毋庸置疑。再者, 從一些研究中, 無論是過去的或是最近的(艾如昀, 1994; 林原宏, 1994; 劉曼麗和陳永峰, 1998; 劉曼麗, 2001; 劉曼麗, 2002; 劉曼麗, 2004; 簡茂發和劉湘川, 1993; Fischbin, Deri & Marino, 1985; Hart, Kerslake, Brown, Ruddock, Kuchemann & McCartney, 1981)也皆指出, 學生在小數

乘除法上的學習是有困難的; 而教師在教學時, 也常感窒礙不順。因此, 我們擬將探討的主題轉移到小數的乘除法上。我們先探討學生對小數乘除法的理解情形, 再提出一些教學上的看法, 提供教師們參考。基於篇幅限制, 本文僅先聚焦在小數乘法的教與學上, 至於小數除法的教與學則將以另文探討。

貳、學生的小數乘法概念

本節擬從兩份國科會研究計畫中(研究 A 為「九年一貫數學領域分數與小數能力指標的詮釋:子計畫三—小數」而研究 B 為「國小學童小數與小數運算概念之調查研究」)擇取部份重要結果, 針對學生在小數乘法文字題與小數乘法計算題兩方面的答題表現說明學生在學習小數乘法概念的理解情形。

一、學生在小數乘法文字題的表現

小數乘法文字題依照被乘數與乘數的數值可分成「小數×整數」、「整數×小數」和「小數×小數」三類, 以下是學生在此部份的答題表現。

* 為本文通訊作者

試題 1：(來自研究 A)

如果賤兔一個月平均增加 0.2 公斤，請問 8 個月後他會增加幾公斤？

答題結果：

年級 \ 解題方法	0.2×8	$\underbrace{0.2+0.2+0.2+\dots+0.2+0.2}_{8\text{個}}$	$8+0.2$	空白	其他
四	*77.4%	*3.1%	3.6%	7.3%	8.6%
五	*87.3%	*1.0%	1.1%	3.7%	6.5%

*號者為正確答案

試題 2：(來自研究 A)

如果一公斤的巧克力 400 元，買 0.2 公斤要付多少元？

答題結果：

年級 \ 解題方法	400×0.2	比例	設某數	$400 \div 0.2$	$0.2 \div 400$	空白	其他
六	*43.7%	*12.7%	*9.1%	12.5%	0.6%	12.4%	9.0%

試題 3：(來自研究 A)

如果一瓶牛奶含有 0.95 克的鈣質，0.3 瓶牛奶含有幾克的鈣質？

答題結果：

年級 \ 解題方法	0.95×0.3	比例	設某數	$0.95 \div 0.3$	$0.3 \div 0.95$	空白	其他
六	*53.2%	*7.2%	*6.4%	8.6%	1.1%	15.6%	7.9%

試題 1 為一位小數乘以整數，施測對象為四年級和五年級的學生，而這些學生在施測前並未學過小數乘法。試題 2 為整數乘以一位小數，試題 3 為二位小數乘以一位小數，此兩題的施測對象均為六年級的學生。從試題 1 的答對率來看，這些學生雖未學過小數乘法，但四五年級學生分

別有 77.4%和 87.3%的學生能列出正確的乘法算式，由此可知，學生能將整數乘法文字題的經驗類推到乘數為整數的小數乘法文字題。而此結果應是乘數為整數的小數乘法與整數乘法的意義均可視為單位量的累加之故。相對於六年級，我們所關注的焦點在於乘數為小數的小數乘法上。從

試題 2 和試題 3 的答題結果來看，僅有 43.7%與 53.2%的學生列出乘法算式並成功解題。此外，未填答的學生也不少，分別為 12.4%與 15.6%，由此可知，學生在判斷這類文字題的運算符號上是有困難的。再者，學生在此兩試題最常犯的錯誤相當一致，都是以除法來解題，分別有 13.1%與 9.7%。經訪談後發現，這類學生大多受到暗隱模式「乘會變大、除會變小」的影響，因考慮所求結果會比 1 公斤的錢少（見試題 2），或所求結果會比 1 瓶的量少（見試題 3），所以選擇除法來解題。訪

談案例舉隅如下：

（試題 3 之訪談案例）

R：請問你為什麼要用 $0.95 \div 0.3$ ？

S：因為 0.3 瓶比 1 瓶少，用除的答案才會變少。

二、學生在小數乘法計算題的表現

小數乘法計算依照被乘數與乘數的數值，可分成「小數×整數」、「整數×小數」和「小數×小數」三類。以下是學生在此部份的答題表現。

試題 4：（來自研究 B）

$$1.8 \times 15 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

答題結果：

年級 \ 答案	27	2.7	270	其他
五	*80.6%	5.5%	2.6%	11.3%

試題 5：（來自研究 B）

$$28 \times 1.3 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

答題結果：

年級 \ 答案	36.4	364	空白	其他
六	*87.0%	2.6%	2.4%	8.0%

試題 6：（來自研究 B）

$$0.16 \times 3.7 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

答題結果：

年級 \ 答案	27	2.7	270	其他
五	*80.6%	5.5%	2.6%	11.3%

試題 4 為一位小數乘以整數，施測對象為五年級學生。試題 5 為整數乘以一位小數，試題 6 為二位小數乘以一位小數，此兩題的施測對象均為六年級學生。從試題 4 的答題結果來看，五年級的答對率有 80.6%，還算不錯。但值得一提的是，有些學生在計算 18×15 後，會將所求得的答案 270 先去掉 0 後再取一位小數，如下圖 1。而此錯誤想法有可能是受到老師們強調「小數點後的 0 可以省略」的影響。此類學生雖不多，但仍值得教師注意一下。

$$1.8 \times 15 = 27.0$$

圖 1

從試題 5 和試題 6 的答題結果來看，六年級學生在前題的答對率為 87.0%，而在後題的答對率卻降為 71.5%。細究之下發現，試題 5 僅乘數為小數，學生若使用「和數的小數點對齊被加數與加數的小數點」之小數加法計算規則解題，也將積數小數點對齊乘數小數點，仍會答題正確。但試題 6 的被乘數與乘數均為小數，學生若類推小數加法計算規則，將被乘數與乘數的小數點對齊後計算，再將積數小數點對齊被乘數與乘數的小數點，則會得到錯誤答案 5.92 或 59.2，如下圖 2 和下圖 3。倘若學生將被乘數與乘數向右對齊後計算，但將積數小數點對齊被乘數，也會得到錯誤答案 5.92，如下圖 4。此外，我們

也發現，在試題 4、試題 5 和試題 6 被歸為「其他」的答案中，多為計算錯誤所致。整體而言，五、六年級學生在小數乘法計算上的表現尚可。學生犯錯的主要原因在於積數小數點的處理錯誤。

$$0.16 \times 3.7 = (5.92)$$

圖 2

$$0.16 \times 3.7 = (59.2)$$

圖 3

$$0.16 \times 3.7 = (5.92)$$

圖 4

參、小數乘法的教學

從上節學生的答題表現可知，學生在判斷小數倍文字題的運算符號上是有困難的，而在積數小數點的處理上也是有問題。以下便針對這兩個部分，提出一些教學上的看法，以供教師們參考。

一、小數乘法意義的教學

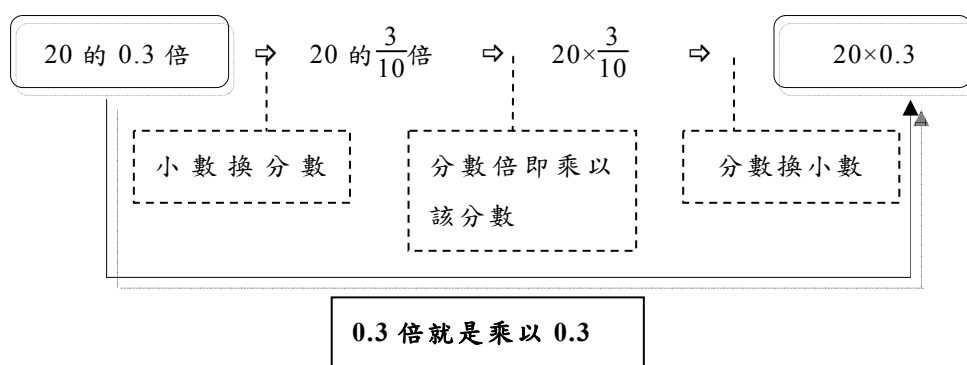
小數乘法主要可分為乘數為整數（小

數的整數倍)與乘數為小數(整數或小數的小數倍)兩類。前者可視為整數乘法經驗—累單位量意義的延伸,因此學生在運算符號的選擇上較無困難。但後者由於不能以累單位量意義來解釋,對學生而言較

缺乏類似經驗,因而在學習上就產生問題了。由此,我們建議教師應循序漸進幫助學生建立小數倍的乘法意義,並透過很多的小數乘法經驗協助學生掌握小數倍的意義。

1、以明確指出有小數「倍」的布題,透過分數倍語言的轉換,讓學生熟悉小數倍語言。

教師可明確指出小數倍的布題,例如「哥哥有 20 元,妹妹的錢是哥哥的 **0.3 倍**,妹妹有多少錢?」等問題,先讓學生知道 $0.a$ 倍就是乘以 $0.a$ 。而此過程則有賴於學生對分數倍語言的了解做為橋樑:

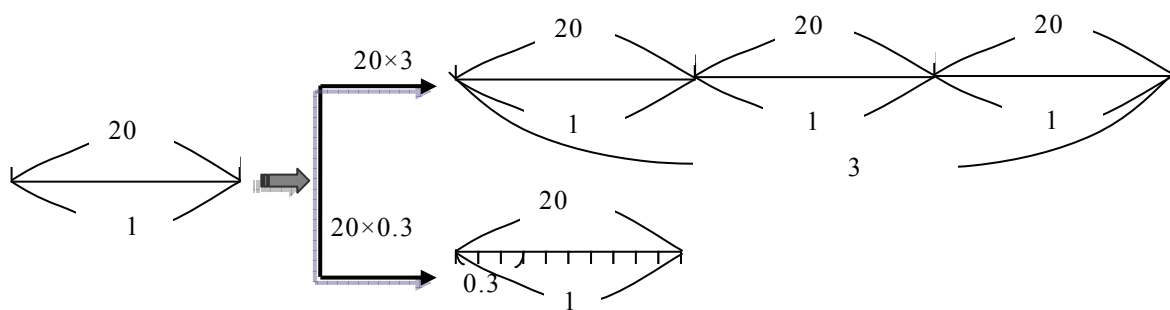


2、配合對比整數乘法的線段圖讓學生了解「乘以整數」與「乘以純小數」意義的差別。

當學生能將小數倍問題以乘法算式表示後,教師可配合對比整數乘法的線段圖讓學生了解「乘以整數」與「乘以純小數」意義的最大不同在於:前者以單位量為主向外累單位量,而後者是先將單位量向內十等分成更小的單位量再累小單位量。茲將前後二者的差異圖示如下:

布題:「哥哥有 20 元,妹妹的錢是哥哥的 **3 倍**,妹妹有多少錢?」

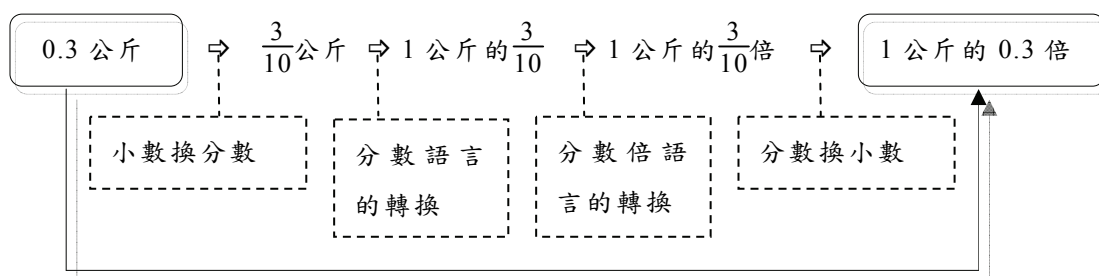
「哥哥有 20 元,妹妹的錢是哥哥的 **0.3 倍**,妹妹有多少錢?」



由上圖中也可充分說明乘以整數所得的積數會比被乘數大，而乘以純小數所得的積數會比被乘數小。

3、引入沒有明確指出小數倍的布題，透過小數與分數以及分數語言等的轉換過程，幫助學生將之與原先的「小數倍」的經驗連結起來。

待學生有了充分的小數倍語言的經驗後，教師便可引入沒有明確指出小數倍的問題，如：「一公斤的橘子要 20 元，買 0.3 公斤要付多少元？」。此時，教師可透過下述轉換過程將問題與原先「小數倍」的經驗連結起來：



接著，教師可引導學生思考：「0.3 公斤是 1 公斤的 0.3 倍，1 公斤的橘子要付 20 元，所以 0.3 公斤的橘子要付 20 元的 0.3 倍，也就是 20×0.3 」。

重量		價錢
1 公斤	= >	20 元
↓ 0.3 倍		↓ 0.3 倍
0.3 公斤	= >	(20×0.3) 元

有些教師認為學生已學了那麼久的整數乘法，在判斷小數乘法情境上應該沒什麼問題，所以甚少協助學生理解小數倍文字題的題意。但試著協助學生理解題意的一些教師則又多教導學生：「你只要把問題中的小數換成整數來想，如果是乘的，那就是用乘的」這樣的解題技巧。小數倍意義的教學往往就這樣被忽略掉了。由於無此部分的基礎，待學生學了小數除法後就更分不清何時該用乘的，何時該用除的。當學生無法區分整數乘法與小數乘法

的差別時，就極易產生迷思概念，如認為乘法會使結果變大，除法會使結果變小。而此迷思概念就會影響學生解文字題中運算符號的選擇，預期結果變大就使用乘法而結果變小就使用除法。因此，純小數倍乘法意義的教學一定要小心處理喔！

二、小數乘法計算的教學

從上節學生的表現來看，學生學習小數乘法的困難有二：計算時該如何對齊，以及積數小數點該如何處理。由於小數加

減法是對齊小數點後計算，而小數乘法是向右對齊後來計算，兩者間的差異容易讓學生感到困惑，因而混用。此外，在小數加法中，和數的小數點是與被加數和加數對齊；在小數減法中，差數的小數點也是與被減數和減數對齊；且小數乘以整數、整數乘以小數計算時，積數的小數點也是與被乘數或乘數對齊。這些經驗都會影響學生在小數乘以小數上的學習。如再遇上教師僅教授「積數的小數位數是被乘數與乘數小數位數的和」的規則，卻未讓學生了解背後的原理，學生僅知其然而不知其所以然，雖暫時記憶了規則，但時間一久，所習得的一些規則便容易張冠李戴了。建議教師在教授此相關課程時，除了加強學生乘法的計算能力之外，更應強化小數乘法的概念性知識，使學生了解積數的小數點位置與被乘數和乘數小數位數的關係。

目前有些教科書是透過分數乘法協助學生理解積數小數點的處理原則，但此處理方式必須將小數乘法教材安排在分數乘法教材之後。我們擬透過此理念來說明如何協助學生理解小數乘法直式計算的過程。以「 1.63×2.1 」為例，我們會先引導學生將小數化成分數後，以分數乘法進行計算後，再將結果轉換回小數：

$$1.63 \times 2.1 = \frac{163}{100} \times \frac{21}{10} = \frac{163 \times 21}{1000}$$

$$= \frac{3423}{1000} = 3.423$$

在此過程中，由於被乘數 1.63 是二位

小數，換為分數時分母為 100，而乘數 2.1 是一位小數，換為分數時分母為 10。兩者相乘後，分母為 1000，故將積數換回小數時應為三位小數。而分子「3423」正是將被乘數和乘數視為整數相乘的結果。待學生理解後，我們再引導學生將此過程對應到小數乘法的直式計算中。也就是將被乘數與乘數向右對齊後，先無視小數點的存在，直接計算「 163×21 」（見圖 5），最後將結果取為三位小數（見圖 6）。

$$\begin{array}{r} 1.63 \\ \times 2.1 \\ \hline 163 \\ 326 \\ \hline 3423 \end{array}$$

圖 5

$$\begin{array}{r} 1.63 \\ \times 2.1 \\ \hline 163 \\ 326 \\ \hline 3.423 \end{array}$$

圖 6

由上述教學歷程可以發現，分母為 10 的幕次的分數與小數互換，和分數乘法的計算規則是理解積數小數點的處理原則的基礎，然而此部份往往是老師們較易忽略的。教師應先複習此兩部分，待學生熟練後再進入小數乘法教學。而教師在導出積數小數點的處理原則後，也應多鼓勵學生隨時省思此原則背後的原理。

此外，我們根據兩份研究發現，一些個案在直式乘法的計算過程中產生 0 時所犯的錯誤（見以下解法 1~解法 5），雖然不多，但值得注意。我們也特別整理出來，供給教師們參考。

$\begin{array}{r} 0.16 \\ \times 1.5 \\ \hline 80 \\ 16 \\ \hline 2.40 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0.16 \\ \times 1.5 \\ \hline 800 \\ 16 \\ \hline 24.00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0.16 \\ \times 1.5 \\ \hline 80 \\ 16 \\ \hline 2.40 \end{array}$
解法 1	解法 2	解法 3

$\begin{array}{r} 0.16 \\ \times 1.5 \\ \hline 80 \\ 16 \\ \hline 2.40 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0.16 \\ \times 1.5 \\ \hline 80 \\ 16 \\ \hline 0.0240 \end{array}$
解法 4	解法 5

肆、結語

本文透過 6 個問題和學生的答題結果來說明學生的小數乘法概念。整體而言，學生不易掌握乘數為小數的乘法意義，因此在乘法文字題的列式上較有問題。同樣地，學生在處理被乘數與乘數皆為小數的計算問題上也較容易產生積數小數點對齊被乘數或乘數的錯誤想法。基於此，本文也針對小數乘法教學提出一些建議。在小數乘法意義的教學方面，教師可先明確指出有小數倍的布題，透過分數倍語言的轉換，讓學生熟悉小數倍的語言。其次，配合對比整數乘法的線段圖讓學生了解「乘以整數」與「乘以純小數」意義的差別。最後再引入沒有明確指出小數倍的布題，透過小數與分數、以及分數語言等的轉換過程，幫助學生將之與原先的「小數倍」的經驗連結起來。在小數乘法計算的教學方面，我們建議教師在透過分數乘法協助學生理解積數小數點的處理原則時，應先複習分母為 10 的幕次的分數與小

數互換，並協助學生從中找出分母與小數中小數點位置的關係。

參考文獻

- 艾如昀 (1994)：國小學生處理小數的歷程與困難。嘉義縣：國立中正大學心理研究所碩士論文（未出版）。
- 林原宏 (1994)：國小高年級學生解決乘除文字題之研究－以列式策略與試題分析為探討基礎。台中市：國立台中師範學院初等教育研究所碩士論文（未出版）。
- 教育部 (2003)：國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。台北市：教育部。
- 劉曼麗和陳永峰 (1998)：國小六年級學生的小數知識。論文發表於中華民國第十四屆科學教育學術研討會暨第十一屆科學教育學會年會，並收錄於論文集。高雄市：國立高雄師範大學。
- 劉曼麗 (2001)：國小學童的小數知識研究。屏東師院學報，14，823-858。
- 劉曼麗 (2002)：小數教學初探。屏東師院學報，16，319-354。
- 劉曼麗 (2004)：國小學生對小數計算的了解。屏師科學教育，19，17-27。
- 劉曼麗 (2005)：學生的小數概念。科學教育月刊，276，2-10。
- 劉曼麗和侯淑芬 (2005)：小數的教學活動。科學教育月刊，277，25-32。
- 簡茂發和劉湘川 (1993)：八十一學年度國民教育階段學生基本學習成就評量國小組試題編製及抽測結果報告。台中市：國立臺中師範學院。
- Fischbein, E., Deri, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-7.
- Hart, K. M., Kerslake, D., Brown, M. L., Ruddock, G., Kuchemann, D. E., & McCartney, M. (1981). *Children's understanding of mathematics* (pp.11-16). London, England: John Murray.