中學生通訊解題第四十六期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
4601

設 x, y 都是絕對值不大於 2006 的整數。試證:存在不全爲零的整數解 x, y 使得

$$\left|x+y\sqrt{3}\right|<\frac{3}{2006}$$

參考解答：

考慮 $x, y \geq 0$，這樣的 $x+y\sqrt{3}$ 共有 2007^2 個,將它們都畫在數線上,其左端點爲 O, 左端點爲 A($2006+2006\sqrt{3}$),將線段 OA 平均分成 2007^2-1 個線段,則這 2007^2 個點中至少有兩個點會在同一個小線段內,設其爲 $x_1+y_1\sqrt{3}$ 和 $x_2+y_2\sqrt{3}$，則

$$\left|(x_1+y_1\sqrt{3})-(x_2+y_2\sqrt{3})\right| \leq \frac{2006(1+\sqrt{3})}{2007^2-1} \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2008}<\frac{3}{2006}$$

由於 $\left|x_1-x_2\right| \leq 2006$ 且 $\left|y_1-y_2\right| \leq 2006$，故 $x+y\sqrt{3}=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\sqrt{3}$ 即爲所

問題編號
4602

我們可以將 1,1,2,2,3,3,4,4 重新排列成 4,1,3,1,2,4,3,2 它滿足了兩個 1 之間夾 1 個數字、兩個 2 之間夾 2 個數字、兩個 3 之間夾 3 個數字、兩個 4 之間夾 4 個數字；試問：我們能否將 $1,1,2,2,3,3,\cdots,2006,2006$，等 4012 個數字重新排列成兩個 1 之間夾 1 個數字、兩個 2 之間夾 2 個數字、. . .、兩個 2006 之間夾 2006 個數字？若可以請寫出排列方式，若不可以請證明之。

參考解答：

不可以，在編號 1 到 4012 的箱子中放入 $1,1,2,2,3,3,\cdots,2006,2006$ 等 4012 個數字，假設能將兩個 1 之間夾 1 個數字、兩個 2 之間夾 2 個數字、. . .、兩個 2006 之間夾 2006 個數字，先確認下列事實：

(1)若數字 i 爲偶數而放進奇數箱中，則另一個 i 必放進偶數箱中。

(2)若數字 i 爲偶數而放進偶數箱中，則另一個 i 必放進奇數箱中。

(3)若數字 i 爲奇數而放進奇數箱中，則另一個 i 必放進奇數箱中。

編號 1 到 4012 的箱子中有 2006 個奇數箱子，而所有要放進箱子的數字中，有 2006 個偶數： $2,4,\cdots,2006$ 各有 2 個，這些偶數將有 1003 個放入奇數箱中，1003 個放入偶數箱中(由上述(1)及(2)得知)，但奇數是一對一對地放進奇數箱，卻不能放進剩下的 1003 個奇數箱，因此假設錯誤。

解題評註：

本題主要是照奇數、偶數討論，以得到一個矛盾的結果。

問題編號
4603

有一個正整數的所有正因數和為3240，且所有正因數的倒數和為$\frac{1620}{1003}$，則此數為何？

參考解答：

錯誤解：

設此數為 n，且所有正因數為 $1,a,b,\ldots,m,n$，所有正因數為 $a_1,a_2,\ldots,a_m,a_{m+1},\ldots,a_{2m-1},a_{2m}$（共 $2m$ 個）

正因數不一定要偶數個

為了方便起見，我們假設 $a_1<a_2<\ldots<a_m<a_{m+1}<\ldots<a_{2m-1}<a_{2m}$（其中 $a_1=1, a_{2m}=n$）

若 n 為完全平方數，則無法完成兩兩配對

(1) 從正因數的性質可知：

$$n=a_1\times a_{2m}=a_2\times a_{2m-1}=\ldots=a_m\times a_{m+1}$$

(2) 由題意可知：

$$a_1+a_2+\cdots+a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{2m-1}+a_{2m}=3240$$

(3) 由題意可知：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}+\frac{1}{a_{m+1}}+\cdots+\frac{1}{a_{2m-1}}+\frac{1}{a_{2m}}=\frac{1620}{1003}$$

(4) 將(2)式左右同乘 n

$$\Rightarrow n\times\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}+\frac{1}{a_{m+1}}+\cdots+\frac{1}{a_{2m-1}}+\frac{1}{a_{2m}}\right)=n\times\frac{1620}{1003}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{a_1}+\frac{n}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_m}+\frac{n}{a_{m+1}}+\cdots+\frac{n}{a_{2m-1}}+\frac{n}{a_{2m}}=\frac{1620}{1003}\times n$$

$$\Rightarrow a_{2m}+a_{2m-1}+\cdots+a_{m+1}+a_m+\cdots+a_2+a_1=\frac{1620}{1003}\times n$$

(5) 由於(2)式與(4)式相等，因此

$\Rightarrow 3240=\frac{1620}{1003}\times n$，所以 $n=2006$

【正確解答】

設此數為 n，且所有正因數為 $a_1,a_2,\ldots,a_{m-1},a_m$（共 m 個），為了方便起見，我們假設 $a_1<a_2<\cdots<a_{m-1}<a_m$（其中 $a_1=1, a_m=n$），因為 n 的所有 m 個相異正因數 $a_1,a_2,\ldots,a_{m-1},a_m$，所以 $\frac{n}{a_1},\frac{n}{a_2},\cdots,\frac{n}{a_{m-1}},\frac{n}{a_m}$ 亦為 n 的所有 m 個相異正因數，因此

$$\frac{n}{a_1}+\frac{n}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_{m-1}}+\frac{n}{a_m}=a_m+a_{m-1}+\cdots+a_2+a_1$$

$$\Rightarrow n\times\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{m-1}}+\frac{1}{a_m}\right)=a_m+a_{m-1}+\cdots+a_2+a_1$$

$$\Rightarrow n\times\frac{1620}{1003}=3240$$

$$\Rightarrow n=2006$$

解題評註：

本題屬於入門的題目，重點在掌握到正因數的主要特徵。很多人在答題時，雖然答案對了，但是犯了上述「錯誤解法」的毛病，以後要特別小心。

問題編號
4604

設 x、y 為正整數且 y ＝ $\sqrt{x-26}+\sqrt{x+30}$，則 y 的最大值是多少？

參考解答：

令 $\sqrt{x-26}=m \Rightarrow x-26=m^2$

$\sqrt{x+30}=n \Rightarrow x+30=n^2$

（m、n∈N 且 m＜n）

$n^2-m^2=56 \Rightarrow (n+m)(n-m)=56=2^3\times 7$

∵ y＝n＋m

∴y 的最大值就是 n＋m 的最大值。

而 n＋m 與 n－m 同奇偶性

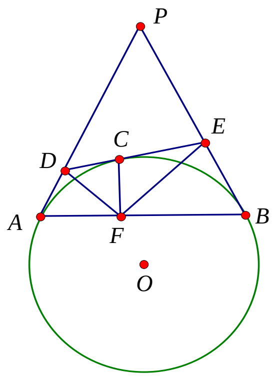
∴n＋m 的最大值＝28 ⇒ y 的最大值＝28

解題評註：

滿足本題的 y 值不只 1 組，所以必須一一討論，但是如果利用奇偶性討論則很容易就能得到 y 的最大值。

問題編號
4605

圓 O 外一點 P 作兩切線得切點 A、B，在 AB 弧上一點 C 作切線分別交 $\overline{PA}$ 與 $\overline{PB}$ 於 D、E 兩點，過 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，垂足為 F 點。證明：$\angle CFD=\angle CFE$



【參考解答一】

過 D、E 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，垂足分別為 M、N，因 $\Delta MAD \sim \Delta NBE$，故 $\dfrac{\overline{DM}}{\overline{EN}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BE}}$。另因 $\overline{DM} \,//\, \overline{CF} \,//\, \overline{EN}$，得 $\dfrac{\overline{DC}}{\overline{CE}}=\dfrac{\overline{MF}}{\overline{FN}}$，而 $\overline{DC}=\overline{AD}$，$\overline{CE}=\overline{BE}$，所以 $\dfrac{\overline{DM}}{\overline{EN}}=\dfrac{\overline{MF}}{\overline{FN}}$，故得 $\Delta MDF \sim \Delta NEF$。由此知 $\angle MFD=\angle NFE$，也因此 $\angle CFD=\angle CFE$

解題評註：

這次大部分的同學均以證明 $\Delta ADF \sim \Delta BEF$ 為目標，基本上並無不可，只是稍稍繁瑣。台北市義學國中章仲臺、彰化縣精誠中學王建詒及台南市後甲國中黃常銘同學是用基礎幾何的方法證明，台北市敦化國中時丕勳、台北縣福和國中郭至中同學是用三角函數的方法證明，大致上均可證出 $\Delta ADF \sim \Delta BEF$。