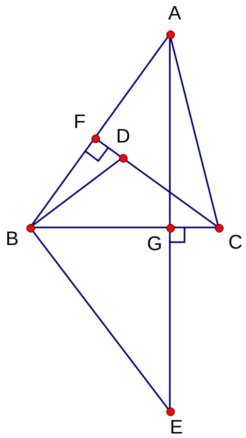
中學生通訊解題第四十五期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
4501

如圖，在 ΔABC 中，$\overline{CF} \perp \overline{AB}$，$D$ 在 $\overline{CF}$ 上，且 $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ 。
$\overline{AE}$與$\overline{BC}$交於G 、
$\overline{AE} \perp \overline{BC}$且$\overline{AE} = 2\overline{BC}$
，則 $\overline{BE} : \overline{BD} = ?$



參考解答：

1. 在 ΔABG與ΔCBF中，

   $\angle ABG = \angle CBF, \angle AGB = 90^\circ = \angle CFB$

   所以 $\Delta ABG \sim \Delta CBF$

2. 在 ΔABE與ΔCDB中，

   由 1 得知

   $\angle BAE = \angle DCB,$又$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{AE} : \overline{CB} = 2:1$

   所以 $\Delta ABE \sim \Delta CDB$

3. 由 2 得知 $\overline{BE} : \overline{BD} = \overline{AB} : \overline{CD} = 2:1$

解題評註：

解題重點：本題最主要在於先證明 $\angle BAE = \angle DCB$ ，然後再進一步找出 $\Delta ABE \sim \Delta CDB$ 。

問題編號
4502

已知數列 $< a_n >$ 滿足：可任意給定兩個自然數作爲 a_1, a_2 項，且第三項開始的每一項均爲前兩項之和。

(1)若數列中出現的某一項爲 5 的倍數，試問之後的項是否還會有 5 的倍數出現？

(2)對於任意給定的 a_1, a_2 ，數列中是否一定會有5的倍數的項出現。

參考解答：

（1）設數列中的第 a_k 項爲 5 的倍數且

$a_k = 5s, a_{k-1} = t$

可得 $a_{k+1} = 5s + t, a_{k+2} = 10s + t, a_{k+3}$
$= 15s + 2t, a_{k+4} = 25s + 3t, a_{k+5} = 40s + 5t,$

則 a_{k+5} 爲 5 的倍數

所以數列中某一項出現 5 的倍數後，則以後每隔 5 項出現一次 5 的倍數。

（2）數列 1，3，4，7，11，18，29，47，…

每一項除以 5 的餘數爲 1，3，4，2，1，3，4，2，…

即該數列不可能出現 5 的倍數

一般來說，下列情形都不可能出現 5 的倍數(數列出列出的是除以 5 的餘數)

1，3，4，2，…

3，4，2，1，…

2，1，3，4，…

4，2，1，3，…

問題編號
4503

求滿足 $w > x > y > z$ 條件的方程式

$2^{w} + 2^{x} + 2^{y} + 2^{z} = 1288\frac{1}{4}$ 其所有整數解。

參考解答：

【參考解答一】

引理 1：設 x 是一正整數，則存在唯一的一組由 0 或 1 組成的數列＜a_0 , a_1 , … , a_n＞，滿足 $x = a_0 + a_1 \times 2^1 + a_2 \times 2^2 + \cdots + a_n \times 2^n$（其中 $a_n = 1$）

證明：依除法原理，

將 x 除以 2 得商數 q_1，餘數 a_0 …

$x = 2q_1 + a_0$

再將 q_1 除以 2 得商數 q_2，餘數 a_1 …

$x = 2(2q_2 + a_1) + a_0$

$= 2^2 \times q_2 + a_1 \times 2^1 + a_0$

再將 q_2 除以 2 得商數 q_3，餘數 a_2 …

$x = 2^2 \times (2q_3 + a_2) + a_1 \times 2^1 + a_0$

$= 2^3 \times q_3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0$

再將 q_3 除以 2 得商數 q_4，餘數 a_3 …

$x = 2^3 \times (2q_4 + a_3) + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0$

$= 2^4 \times q_4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0$

……如此連續地將所得商數除以 2 而得到一「商數數列」＜q_1 , q_2 , …＞及一「餘數數列」＜a_0 , a_1 , …＞，很顯然這兩個數列均由 x 而唯一決定，其中＜a_0 , a_1 , …＞是由 0 或 1 組成的，而＜q_1 , q_2 , …＞是一遞減的正整數數列，且 $q_{k+1} = \left[\frac{q_k}{2}\right]$（$[\,a\,]$ 表小於或等於 a 的最大整數）。

因此可經過有限的除法步驟使得 $q_n = 1$，而此時＜a_0 , a_1 , … , $a_n = 1$＞可滿足 $x = a_0 + a_1 \times 2^1 + a_2 \times 2^2 + \cdots + a_n \times 2^n$。

引理 2：若 $x = \frac{N}{2^m}$（其中 N , m 是正整數），則 x 可用 2 進位法以有限項的和表示。

證明：由引理 1 知，

$N = a_0 + a_1 \times 2^1 + a_2 \times 2^2 + \cdots + a_n \times 2^n$（其中 $a_n = 1$，其餘 a_k 均爲 0 或 1）。所以

$$x = \frac{N}{2^m} = a_0 \times 2^{-m} + a_1 \times 2^{1-m} + \cdots + a_n \times 2^{n-m}$$

即爲所求。

回到原題，$1288\frac{1}{4} = \frac{5153}{4}$

$5153 = 1 + 1\times 2^5 + 1\times 2^{10} + 1\times 10^{12}$

$\frac{5153}{4} = 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{3} + 1\times 2^{8} + 1\times 10^{10}$

所以（w , x , y , z）=（10 , 8 , 3 , –2）

2	5153	
2	2576	……… 1
2	1288	……… 0
2	644	……… 0
2	322	……… 0
2	161	……… 0
2	80	……… 1
2	40	……… 0
2	20	……… 0
2	10	……… 0
2	5	……… 0
2	2	……… 1
	1	……… 0

註：在十進位表示法中，分數 $\frac{q}{p}$ 不是一定可以表示成有限小數，如 $\frac{1}{3},\frac{1}{7}$ 等，而 $\frac{q}{p}$ 可以用有限小數表示的條件是「p 僅能含有 2 或 5 的因數」(因爲 $10=2\times 5$)。而在二進位表示法中，$\frac{q}{p}$ 也不是一定可以表示成形如 2^k 的有限項和，$\frac{q}{p}$ 可以用表示成有限項和的條件是「p 爲 2 的冪次」。下面的例子是二進位的「循環小數」：

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\cdots$$

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\cdots$$

$$\frac{1}{7}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{12}}+\cdots$$

【參考解答二】

引理：設 $x=2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}$（其中 a_1, a_2, ..., a_n 均是整數且 $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$），若整數 α 滿足 $2^{\alpha}\le x<2^{\alpha+1}$，則 $a_1=\alpha$

證明：假設 $a_1 \ne \alpha$，

① 若 $a_1 > \alpha$，因 2 的冪次值均大於 0，所以 $x>2^{a_1}\ge 2^{\alpha+1}$，不合

② 若 $a_1 < \alpha$，則 $x=2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}\le 2^{\alpha-1}+2^{\alpha-2}+\cdots+2^{\alpha-n}=\frac{2^{\alpha-n}(2^n-1)}{2-1}$ $=2^{\alpha}-2^{\alpha-n}<2^{\alpha}$，不合

因此假設錯誤，可得 $a_1=\alpha$。

回到原題，設

$x_1=1288\frac{1}{4}=2^w+2^x+2^y+2^z$（其中 $w > x > y > z$）

① 因 $2^{10}<x_1<2^{11}$，所以 $w=10$，考慮

$$x_2=1288\frac{1}{4}-1024=264\frac{1}{4}=2^x+2^y+2^z$$

② 因 $2^8<x_2<2^9$，所以 $x=8$，考慮

$$x_3=264\frac{1}{4}-256=8\frac{1}{4}=2^y+2^z$$

③ 因 $2^3<x_3<2^4$，所以 $y=3$，此時

$\frac{1}{4}=2^z$ 可得 $z=-2$

註：解法二的引理已含有 a_1 解的唯一性（因任何比 α 大或比 α 小的整數均不能成立），因此 (10, 8, 3, −2) 是方程式的唯一解。

【參考解答三】

引理：對任意負整數 a_1, a_2, ..., a_n 且滿足 $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$，則 $2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}$ 必不是整數。

證明：$2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}$

$$=2^{a_n}\cdot\left(2^{a_1-a_n}+2^{a_2-a_n}+\cdots+2^{a_{n-1}-a_n}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2^{|a_n|}}\times\text{奇數}$$，故此數必不是整數

回到原題，$2^w+2^x+2^y+2^z=1288\frac{1}{4}$，

兩邊同乘以 4 可得

$2^{w+2}+2^{x+2}+2^{y+2}+2^{z+2}=5153$……(∗)

由引理可知，$w+2>x+2>y+2>z+2\geq 0$。

此時若 $z+2\neq 0$，(∗)式中左右兩邊的奇偶性不同，因此 $z=-2$，代回(∗)式得

$2^{w+2}+2^{x+2}+2^{y+2}=5152=32\times 161$

即 $2^{w-3}+2^{x-3}+2^{y-3}=161$……(∗∗)

同上述奇偶性得知 $y=3$，代回(∗∗)式得 $2^{w-3}+2^{x-3}=160=32\times 5$ 即

$2^{w-8}+2^{x-8}=5$，同上述奇偶性得知 $x=8$，代回得 $2^{w-8}=4$，所以 $w=10$

解題評註：

本期通訊解題得到最多迴響的應該是這一題吧！大部份來信的同學都是用 2 的冪次值來推測 w，x，y，z 的整數解（見解法二)，唯以此法解題的同學，大都先認定 z 值等於 -2，而事實上解法二並不需要先解出 z 值。解法一是用整數的除法原理導出 2 進位表示法的存在唯一性，解法三則是將本題純粹以解方程式的觀點，佐以整數的奇偶性而得。

問題編號
4504

若 A,B,C 是整數，且 $A+1,B+1,C-1$ 皆為完全平方數，且 $AB=C$，試求 A,B,C 的所有解

參考解答：

設 $A+1=x^2,B+1=y^2,C-1=z^2$ (x,y,z 是整數)

$AB=C\Rightarrow(x^2-1)(y^2-1)=z^2+1$

$\Rightarrow x^2y^2-x^2-y^2+1=z^2+1$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=x^2y^2$

試就 z 值來討論

(1) $z=0$，則

$x^2+y^2+z^2=x^2y^2$

$\Rightarrow x^2+y^2=x^2y^2\Rightarrow(x^2-1)(y^2-1)=1$

故 x^2-1 和 y^2-1 皆是 1 的因數，只能解出 $x^2-1=-1$ 與 $y^2-1=-1$

是以 $x=y=0$ 即 $A=-1,B=-1,C=1$

z 的奇偶	x 和 y 的奇偶	$x^2+y^2+z^2$ 除以 4 的餘數	x^2y^2 除以 4 的餘數
奇	同奇	3	1
	同偶	1	0
	一奇一偶	2	0
偶	同奇	2	1
	同偶	0	0
	一奇一偶	1	0

由上表知，除了 x,y,z 皆為偶數外，其他情況皆無解

設 $x=2^p\cdot\alpha,y=2^q\cdot\beta,z=2^r\cdot\gamma$，這裡 p,q,r 是自然數，而 α,β,γ 是奇數

則 $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$

$\Rightarrow(2^p\cdot\alpha)^2+(2^q\cdot\beta)^2+(2^r\cdot\gamma)^2=(2^p\cdot\alpha)^2\cdot(2^q\cdot\beta)^2$

$\Rightarrow 2^{2p}\cdot\alpha^2+2^{2q}\cdot\beta^2+2^{2r}\cdot\gamma^2=2^{2p+2q}\cdot\alpha^2\beta^2$

若 p 不大於 q 跟 r，等號兩邊同約去 2^{2p} 得 $\alpha^2+2^{2(q-p)}\cdot\beta^2+2^{2(r-p)}\cdot\gamma^2=2^{2q}\cdot\alpha^2\beta^2$

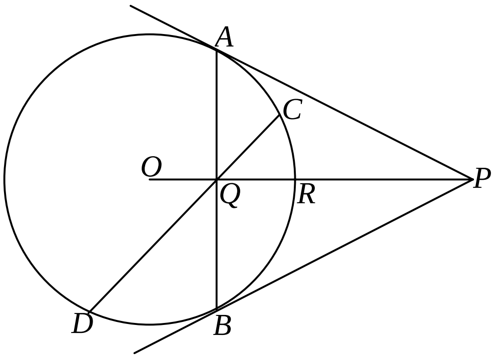
	α^2	$2^{2(q-p)}\cdot\beta^2$	$2^{2(r-p)}\cdot\gamma^2$	$2^{2q}\cdot\alpha^2\beta^2$
除以 4 的餘數	1	1 或 0	1 或 0	0

同理可推得 q 不大於 p 跟 r;與 r 不大於 p 跟 q 的兩種情況亦無解

故 A,B,C 只有一組解就是 $A=-1,B=-1,C=1$

問題編號
4505

過圓 O 外一點 P 作圓 O 的切線，得切點 A、B，若 Q 為 $\overline{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 之交點，$\overline{CD}$ 為過 Q 的任意一條弦，試證：ΔPAB 與 ΔPCD 有相同的內心



參考解答：

設 R 為圓 O 與 $\overline{OP}$ 之交點，E 為圓 O 與 $\overline{DP}$ 之交點，

$\because \overline{CQ}\times\overline{DQ}=\overline{AQ}\times\overline{BQ}=\overline{AQ}^2=\overline{OQ}\times\overline{PQ}$

$\therefore O$、C、P、D 四點共圓

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$

$\therefore \overline{OP}$ 平分 $\angle CPD$

$\because O$、C、P、D 四點共圓

$\therefore \angle 5=\angle CDE$　，而 $\angle 5+\angle 6=2\angle CDE=2\angle 5$

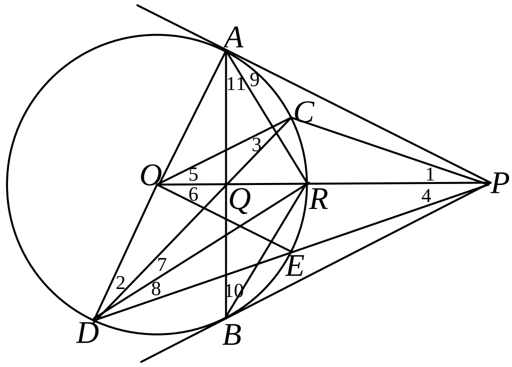
$\therefore \angle 5=\angle 6 \Rightarrow \overset{\frown}{CR}=\overset{\frown}{ER} \quad \Rightarrow \angle 7=\angle 8$

$\therefore R$ 為 ΔPCD 的內心

$\because \angle 9=\angle 10$ (弦切角)，$\angle 11=\angle 10$ ($\overline{AR}=\overline{BR}$)

$\Rightarrow \angle 9=\angle 11$

$\therefore R$ 為 ΔPAB 的內心



解題評註：

這是一個開性的證明題，可利用各種幾何性質證明：如圓周角、圓心角、角平分線、四點共圓、甚至阿波羅圓來處理。在此我們提供<u>四點共圓</u>的性質來證明。