漫談高中數學中的數線

張海潮[1]　朱啟台[2*]

[1]國立臺灣大學數學系

[2]普通高級中學課程數學學科中心

壹、遇見無理數

關於數線的起源，與其說我們想替抽象的數字找一個具體的象徵，倒不如說我們想把長度的概念加以「量化」或「數位化」，這就像測量，也像工程師把連續的類比訊號轉化為離散的電子訊號。

談到測量長度，就要先定出基本單位長，然後觀察被測物的長度是基本單位長的多少倍。關於這個倍數，我們通常採用十進位數字系統來描述，例如，19 英寸的液晶螢幕指的是螢幕的對角線長度為「1 英寸」的 19 倍（1 英寸大約等於 2.54 公分）。

按照一般正常人的直覺，任何線段的長度都應該可以用十進位數字系統很精確地描述吧？

好比我們拿一把直尺量測一支鉛筆的長度，將鉛筆一端對正刻度 0 的位置，或許鉛筆的另一端並不剛好落在某個刻度上，而是落在兩個刻度線的中間，這會不會是因為直尺不夠精密呢？

想像我們能夠應用奈米技術，將直尺的刻度不斷細分、不斷細分，只要切得夠細，鉛筆的另一端總會和某一個刻度切齊吧？

* 為本文通訊作者

如果你的直覺不同意上面的看法，要嘛你是個懷疑論者，不然你一定非常有潛力成為優秀的數學家。

事實上，這個問題困擾了古希臘人很長的一段時間，難道真的會有某個線段，它的長度竟然無法用十進位數字精確描述嗎？

也許你會說當然有，1/3=0.3333...，1/3 就無法用有限的數字來精確描述，但這只是因為我們選了一個不恰當的測量系統，如果改用三進位，則 1/3=0.1。

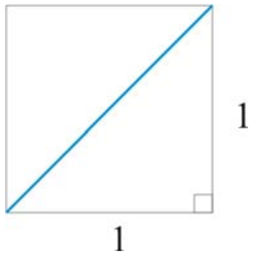
因此，真正的麻煩在於：會不會存在某個線段，它的長度無法用有限個數字來描述呢？我們的意思是，不論嘗試哪一種進位系統都辦不到。

這個問題的答案實在太讓人難以置信了，這種「無法以常理看待」的線段不但存在，而且其族群比「有理可循」的族群大得多，而且這個大是超乎想像的大，不成比例的大！

希臘人錯誤的直覺是被正方形給糾正的。

注意邊長為 1 的正方形的對角線，請問它的長度可以用十進位制的直尺精確地量出來嗎？萬一不行，我們就換別的進位系統試試看，有沒有機會找到某個進位系

統，可以讓我們用有限個數字精確地描述這個量呢？

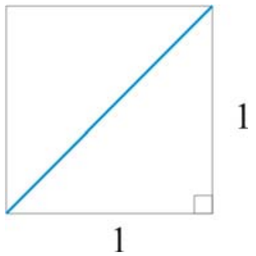


這個問題的另一種版本就是大家比較常聽到的：

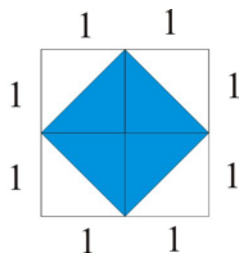
請問根號 2 是有理數嗎？

貳、遇見根號 2

給定邊長爲 1 的正方形，其對角線長爲根號 2，要了解這件事不一定非要借助畢氏定理。



拿出 4 個邊長爲 1 的小正方形，把他們拼成邊長爲 2 的大正方形，小正方形的對角線剛好構成一個中的正方形，而且面積等於 2，也就是說，這個正方形的邊長爲根號 2。



從這個觀點來看根號 2 並不只是爲了突顯他的原始人氣息而已。面積等於 2 的正方形，其邊長碰觸到有理數的疆界；那麼，體積等於 2 的正立方體呢？其邊長碰觸到尺規作圖的疆界，這才是真正難倒希臘人的大問題。

參、質數

質數的英文是 prime ，是最原始的數，或者說，它就像化學上的元素，能組合成各種化合物，所以中國大陸將 prime 翻譯成「素數」。

化合物靠化學鍵將元素結合在一起，我們如何將質數結合成新的數呢？我們的「膠水」或「水泥」是乘法。

（如果用加法來構造自然數的話，元素只有一個，那就是 1 ，任何一個自然數 n 只要將 1 累加 n 次即可得到）

整數論有個著名的定理（fundamental theorem of arithmetics），這個定理說：每個數都可分解成質數的乘積，而且，分解法是唯一的。

所謂分解法唯一，是說它的成分是固定的，例如，$24=2^3\times3$，是由 3 個 2 和 1 個 3 所組成的，也許有些人把 24 寫成 3×2^3，另一些人則寫成 $2\times2\times2\times3$，但各種寫法都指向相同的成分，也就是說，各個質數所占的比例是固定的，並不因寫法不同而有差異。

質數既然是元素，任何一個數(除了 1 以外）要嘛是元素，不然就是由元素結合而成的化合物，換句話說，大於 1 的整數可以分成 2 類：質數與合數（合成數）。

講到這裡，我們還沒替質數下個嚴謹的定義。

要了解一個人，有兩種常見的觀察方向，一種是向內作分析，一種是向外找關係，什麼意思呢？

看看一個人的五臟六腑，是不是每個器官都能正常運轉？這是從內部了解一個人。看看一個人的父母是誰？死黨是誰？同學是誰？這是從外部了解一個人。認識質數，正好可以採用這兩種切入方式：

1. 沒有辦法再分離出更小的成分了，用數學的講法就是：除了 1 和自己之外，沒有別的因數。
2. 天底下的任一個數，要嘛是這個質數的倍數，不然就和它互質（質數要嘛全部融於它，不然就跟它完全不相干——沒有共同的成分）。

這兩個定義的風味雖然大異其趣，但本質是等價的，一般在高中階段只會接觸第 1 種定義，但在大學的整數論課程裡，第 2 種定義反而比較常用。

肆、根號 2 是無理數

如果沒有被太多數學知識污染，我們應該很難想像，竟然會有一枝鉛筆的長度沒有辦法被精確地數位化，會不會只是因為我們的測量技術不夠精密呢？

$$1<\sqrt{2}<2$$
$$1.4<\sqrt{2}<1.5$$
$$1.41<\sqrt{2}<1.42$$
$$1.414<\sqrt{2}<1.415$$
$$1.4142<\sqrt{2}<1.4143$$
$$1.41421<\sqrt{2}<1.41422$$
$$\cdots\cdots$$

想像有個像夸父一樣的頑固分子，一開始他相信根號 2 可以被精確地數位化，或者說，可以寫成分數，很不幸地，日復一日年復一年,他還是無法將根號 2 定位。

當一個人愛上一個永遠不可能愛他的人，有修養的人可能選擇祝福對方，然後靜靜地走開，但報復心理比較強烈的人可能會說：「我得不到的，別人也休想得到」。

這樣的人，當他滿懷希望要用有限個數字將根號 2 定位而終不可得的時候，他竟然選擇了一條完全相反的路，企圖證明根號 2 不可能被精確地數位化，而他用的方法也是充滿轉折的：

假設根號 2 可以寫成分數,就寫成 p/q 好了，我們總是可以把 p 和 q 的共同成分約掉，得到一個最簡分數，也就是說，p,q 互質，p,q 之間沒有相同的成分。

現在將 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$ 的兩邊平方，得到

$$2=\frac{p^2}{q^2},\ 2q^2=p^2$$

因此，p^2 含有 2 的成分，於是 p 必須要有 2 的成分，於是 p^2 會有 $2\times2=4$ 的成分，這樣一來，q^2 也必然會有 2 的成分，於是 q 也必須有 2 的成分。

推論到此，我們發現 p,q 都有 2 的成分，怎麼會一開始說 p,q 沒有相同的成分，走到後來又說 p,q 有相同的成分呢？

化解矛盾的唯一方法是，一開始的假設就出問題了，也就是說，根號 2 不可能寫成分數的型式。

上述證法是所有教科書的標準作法，不曉得已經風行了幾個世紀。幾乎每個初學者都曾經被這個兜圈子的證明搞得暈頭轉向。

最近和張海潮老師通電話，他提到了一個證明方法，頗能治療初學者的頭暈問題。

這個新方法的開頭和舊方法是一樣的，假設根號 2 可以寫成分數，也就是 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$，其中 p,q 沒有相同的成分。第二步也相同，將式子兩邊平方，$2=\frac{p^2}{q^2}$。精彩的是接下來的直觀：

如果 p/q 不是整數，p^2/q^2 更不可能是整數。

這是因為，如果 p,q 沒有相同的成分，p^2 和 q^2 自然也不會有相同的成分；如果 p/q 都無法化簡成整數，p^2/q^2 更沒有機會了。

因此，$2=\frac{p^2}{q^2}$ 這個式子是個明顯可笑的矛盾：等號左邊是整數，右邊不是整數。兩者怎麼可能相等？

我們將上述證明的關鍵再寫一次：

如果 p/q 不是整數，p^2/q^2 更不可能是整數。

從這個直觀出發，我們可以得到一群和根號 2 類似的無理數：

一個自然數 n，除非他是完全平方數（意即，n 可以寫成 m^2，m 也是自然數），否則根號 n 都是無理數，例如 $\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ldots$。

伍、數系

曾經聽人說過，數學就是在研究集合，以及建立在集合上的函數。這雖然是一種過度簡化的講法，但如果只能用一句話來描述數學，這句話還不算太差勁（註）。

高中數學最關心的集合就是實數 R，最關心的函數就是從 R 到 R。這就是爲什麼實數系那麼重要，直角坐標系那麼重要。這就是爲什麼在高中階段談數與坐標系時，不需要在整數論上著墨太多。

整數是爲實數系服務的，不是爲抽象代數服務的，這樣的定位應該比較適合高中數學吧。

註：

事實上，目前只能想到另一種更高竿的講法，是 Henri Poincaré 講的：

- Mathematics is the art of giving the same name to different things.
  把不同的事情看成同一件——這門藝術叫數學。
- Poetry is the art of giving different names to the same thing.
  把同一件事情說得不一樣——這門藝術叫文學。