中學生通訊解題第四十四期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
4401

在紙上隨意寫出2006個“＋”號或“—”號，並按以下規則擦去：每次隨意擦去兩個相鄰的符號，若爲同號則添加一個“＋”號，若爲異號則添加一個“—”號。

(1)試問經過多少次操作後不能再進行下去？

(2)操作的過程是否會影響結果？

(3)最初的“＋”號的個數與“—”號的個數是否會影響結果？

參考解答：

(1)每一次操作，可以減少一個符號，最後不能操作時，只剩下一個符號，因此共有2005次的操作。

(2)每一次的操作可能“—”號減少兩個，或者個數保持不變。每一次的操作可能“＋”號減少一個，或者個數保持不變。所以每一次操作後的所有符號的乘積保持不變號，故操作的過程不會影響結果。

(3)如果最初的狀態爲偶數個“—”號，則最後結果爲剩下一個“＋”號。如果最初的狀態爲奇數個“—”號，則最後結果爲剩下一個“—”。

問題編號
4402

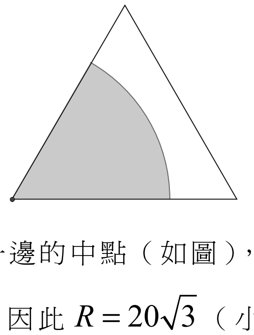
有一個面積爲 1200π 平方公尺的正三角形牧場（經過換算，邊長約爲 93.3 公尺），牧場裡長滿了青草，牧場四周以柵欄圍起。牧場主人養了一隻名貴的羊，爲了讓牧場裡一半的青草不被這隻羊吃光，於是想用一條繩子的一端綁在羊身上，另一端綁在柵欄上。

請問主人要將繩子的一端綁在柵欄的何處，才能使繩子最短？此時繩子多長？

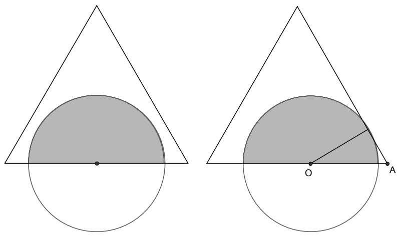
參考解答：

設繩子的長度爲 R 公尺，點代表繩子一端所綁的位置，陰影部分爲一半的青草。

1. 若繩子綁在頂點上（如圖），則 $\frac{\pi R^2}{6}=600\pi$，因此 $R=60$，即繩長爲 60 公尺。



2. 若繩子綁在任一邊的中點（如圖），則 $\frac{\pi R^2}{2}=600\pi$，因此 $R=20\sqrt{3}$（小於邊長的一半）



3. 若繩長為 $R=20\sqrt{3}$ 公尺，且半圓與正三角形相切，則 $\overline{OA}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}R=40$，即繩子只要綁在距離頂點大於或等於 40 公尺的邊上即可。

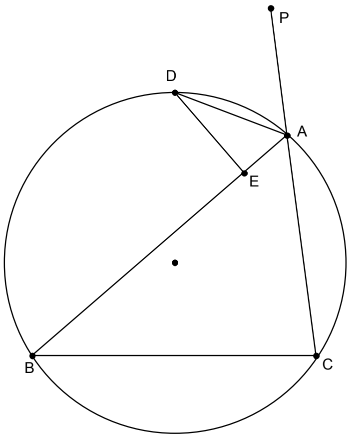
由 1、2、3 得知，最短的繩長為 $20\sqrt{3}$ 公尺，此繩子的一端綁在距離頂點大於或等於 40 公尺的邊上。

解題評註：

本題關鍵在於分段討論，並解釋何時可以造成半徑最短。

問題編號 4403

已知在 ABC 中，$\overline{AB}>\overline{AC}$，$\angle A$ 的外角平分線與 ABC 的外接圓交於 D 點，過 D 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，其垂足為 E 點，試證：$2\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{AC}$



參考解答：

證明一：

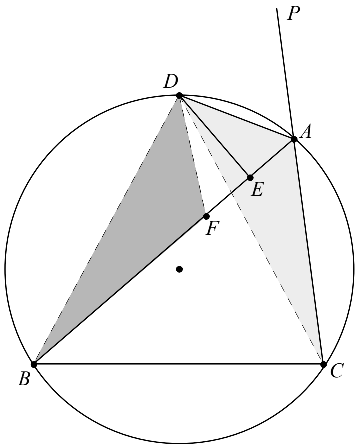
① 在 BE 間作 F 點使 $\overline{AE}=\overline{AF}$，得 $\overline{DA}=\overline{DF}$

②$\angle DBF$ 與 $\angle DCA$ 是 AD 弧的圓周角，所以 $\angle DBF=\angle DCA$

③$\angle BFD$ 與 $\angle DFA$ 互補也就是與 $\angle DAF$、$\angle DAP$ 互補，因此 $\angle BFD=\angle CAD$，故 $\Delta DBF\cong DCA$

④由此得 $\overline{BF}=\overline{CA}$，

因此 $\overline{AB}-\overline{AC}=\overline{AF}=2\overline{AE}$



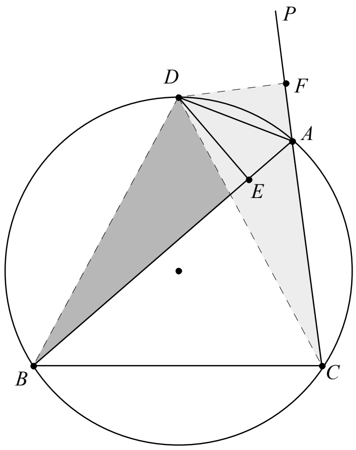
證明二：

①過 D 點作 $\overline{CP}$ 的垂腺 $\overline{DF}$，因 A 是角平分線，得 $\overline{DE}=\overline{DF}$，$\overline{AE}=\overline{AF}$

②$\angle DBF$ 與 $\angle DCA$ 是 AD 弧的圓周角，所以 $\angle DBF=\angle DCA$

③ 由上述兩點及 RHS 性質得 $\Delta DBE\cong DCF$

④ $\overline{AB}$ $\overline{AE}=\overline{BE}=\overline{CF}=\overline{AC}$ $\overline{AF}=\overline{AC}$ $\overline{AE}$，因此 $\overline{AB}$ $\overline{AC}=\overline{AF}=2\overline{AE}$



解題評註：

這次的題目主要是針對歐氏幾何中的保距變換所設計的，保距變換中含三個基本變換，分別是平移、旋轉、對稱。這題只要做一個旋轉變換即可看出結果。

問題編號
4404

若 x^3 是整數, x^8 也是整數,請問: x 是不是整數? 試說明理由。

參考解答：

$\because x^3$ 是整數，x^8 也是整數

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{x^8}{(x^3)^2}$ 是有理數

$\Rightarrow x = \dfrac{x^3}{x^2}$ 是有理數

$\therefore$ 可設 $x=\dfrac{q}{p}$，p 是整數、q 是整數

若 p 不是 q 的因數

$\Rightarrow$ 已知 $x^3 = (\dfrac{q}{p})^3 = \dfrac{q^3}{p^3}$ 是整數

$\therefore$ p^3 是 q^3 的因數

但 p 是整數、q 是整數

$\therefore$ p 是 q 的因數　(矛盾)，即假設錯誤，故，p 是 q 的因數

$\Rightarrow$ 存在整數 k，使 $q = pk$

$\Rightarrow x=\dfrac{q}{p}=\dfrac{pk}{p}=k$　即 x 是整數

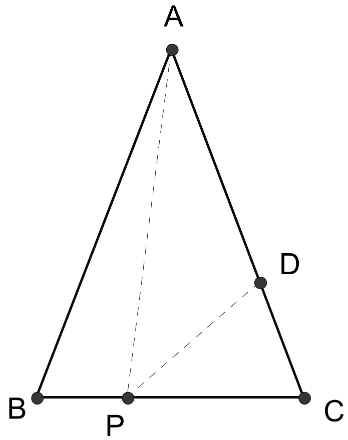
解題評註：

1.直接証法不易解釋清楚，所以用反証法處理。

2.先利用「非零整數相除必爲有理數」之性質確定 x 是有理數，再由「有理數之定義」，利用反証法証明 x 是整數。

問題編號
4405

如圖，在 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BC}=1$，$D$ 在 $\overline{AC}$ 上，$\overline{AD}:\overline{DC}=2:1$，$P$ 爲 $\overline{BC}$ 上的一動點。當 $\overline{BP}=k$ 時，$\overline{AP}+\overline{PD}$ 有最小值，試問 $k=?$



參考解答：

1. 以 $\overline{BC}$ 為對稱軸，分別作 A,D 的對稱點為 A',D'，$\overline{AD'}$ 與 $\overline{BC}$ 的交點 P，即為使 $\overline{AP}+\overline{PD}$ 的值最小。

2. 在 ΔABP 與 $\Delta D'CP$ 中，

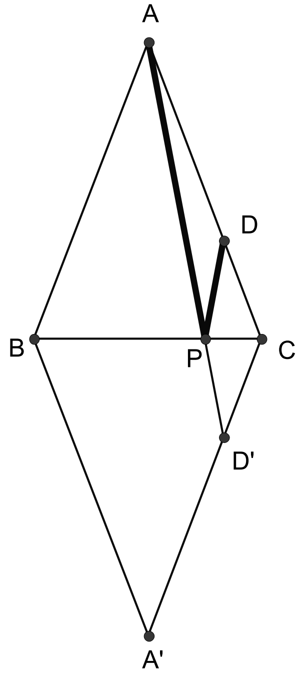
   $\angle APB = \angle D'CP$ 且 $\angle APB = \angle D'PC$

   因此 $\Delta ABP \sim \Delta D'CP$

2. 由 2，所以

   $\overline{BP}:\overline{CP}=\overline{AB}:\overline{D'C}=\overline{AC}:\overline{DC}=3:1$

   所以 $k=\overline{BP}=\dfrac{3}{4}\times\overline{BC}=\dfrac{3}{4}\times 1=\dfrac{3}{4}$



解題評註：

本題難度不高，可以鼓勵大家一起動腦思考數學問題，並體會其中樂趣。只要掌握到以下兩點，就有機會可以解出來。

1.相異兩點 A, B 在一直線同側時，如何找出在直線上的一點 P，使得 AP+PB 為最小。(這是對稱的概念)

2.利用相似三角形，找出題目要求的線段長。