

從 PISA 看數學素養與中小學數學教育

周玉秀

國立臺北教育大學 國民教育學系

摘 要

本研究以2003年國際學生評量計畫工具為基礎，概述41個參與國家學生之數學素養。具體比較各國學生表現之排名，發現測驗結果與理論假設不盡符合。國際經合發展組織（OECD）預設學生數學學習成就高低應該能夠與國內生產毛額（gross domestic product）多寡成正比，然而，幾個經濟主要國家15歲學生之數學成就表現不如預期程度。本文透過國際學生評量計畫中空間與形狀等四個概念主題之單元題型，分析求解情境問題所需具備之數學素養與技能，進而論述課程標準落實至中、小學數學教學之理念與實踐議題。

關鍵詞：PISA、數學素養、空間與形狀、變化與關係、量、不確定性

壹、前言－國際教育體檢

國際學生評量計畫（Programme for International Student Assessment, 簡稱 PISA）為一種國際標準化評量工具，由經濟合作發展組織（Organisation for Economic Co-operation and Development 以下簡稱 OECD, 2002）領航。該國際組織以為國家所有的成員有權有責被告知，教育體系是否教育好他的公民面對未來世界的挑戰。在此共識下，PISA 着手檢測各國學生學習到多少掌握明日世界的能力（Learning for Tomorrow's World）。該評量計畫具繼續性，共施測三輪，每一輪間隔 3 年。第一輪（2000 年）測驗的內容以閱讀為主、數學與科學領域為輔，共有 32 個國家參與，其中非 OECD 的國家有巴西、立陶宛、俄羅斯聯邦與列支敦士登（Liechtenstein）（註一）等國；第二輪（2003 年）測驗有 41 個國家參與，以數學為主，

題目中三分之二在評量數學能力，其他三分之一則評量閱讀、科學與解題能力。前面兩輪台灣皆沒有參與。

今年（2006）舉辦的第三輪測驗，以科學素養為主軸，資訊使用能力為輔，數學領域佔四分之一。包含我國（Taiwan R.O.C.）在內，共有 58 個國家報名。

OECD（2004）提出的理論假設為：學生數學學習成就與國內生產毛額（gross domestic product, GDP）成正比；亦即，國內生產毛額高，投資在教育絕對成本較豐厚的國家，如美國或挪威，其學生應有相對較好之表現成就。但測驗結果呈非線性：國內生產毛額高的國家，如美國、挪威之結果不如預期的好，反落在國內生產毛額排名相對後段的國家（如：韓國）之後。經濟資產上的優勢，不能保證學習成就之產出，事實上，符合理論假設之國家約佔 1/4 強（有 28%）。顯然，可合理地懷

疑其中含有另外的實質因素，如：課程與教學影響著學生數學學習成就。

就美國而言，之前信誓旦旦揭示 2000 年擬達到的全國教育目標共八條，其中第三條界定四、八、十二年級學生在數學等核心課程上須達到的一定能力，第五條則預期美國學生數學與科學表現領先世界（McCarty, 2005）。然而，這個預期目標在國際學生評量計畫的檢視下顯然尚未達成；美國學生在兩次國際學生評量計畫的數學素養和解題能力方面表現皆不佳。2000 年時美國學生成績列居第 19 名，第二輪 2003 年則在 41 國中列居第 24 名，所得到的平均成績為 483 分，也低於 OECD 國家的平均值（500 分）（註二）。

對此現象，全美數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics，以下簡稱 NCTM）於 2004 年 12 月聲稱，他們早在制定數學課程與評量標準時（*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, 1989），就將解題能力列為數學教育的第一目標。言外之意，目前美國學生的表現與預期能力的落差，極大可能是在課程落實的環節上出了問題。

若以美國五至八年級數學課程標準而言，全美數學教師協會 NCTM 確實將解題、溝通、推理與聯結視為數學的意涵（詳見 Houghton 版教科書），此外，數與數的關係、數系、數論、代數、統計、機率、幾何、量與實測皆列為數學課程的主題領域。該課程列舉了許多活潑的教學案例，

致力於「結合真實生活情境（real-life situations）與數學問題」（1989）。NCTM 主席 Seeley 堅信：若學生在課程中確實理解數學，自然能具備能力去解決課堂上所沒有碰到的新問題。他們努力讓全國學生有相同機會，學到高層次（high level）的數學知能（NCTM, 2004），至於學生在兩輪測驗中數學表現不佳，達不到 PISA 數學素養中要求的高層次能力，主要原因應在於各州、各學區乃至於各學校未能確實落實 1989 年的課程理念與標準。根據 Seeley 的論述，美國學生的表現好壞與各地學校是否實踐國家教育目標之理念有高度的關聯。

在全球化脈絡下，比較教育學者一向關切各國學生之數學學習成就高低與各國中、小學數學教育之間的關係。Givvin, Hiebert, Jacobs, Hollingsworth, Gallimore 等人（2005）以 1999 年第三屆國際數學與科學調查（TIMSS）的幾個參賽國為主要樣本，研究分析澳洲等七國八年級的中、小學數學教育目標與教學模式後，指出：有些國家，如日本，教師教學互動模式較趨一致，就活動內容而言，教師們花較多時間講述新的數學概念。澳洲及瑞士的數學教師們上課互動模式有較大的變異度，在澳洲的八年級課堂上，老師會不斷地複習數學教材，而美國及瑞士相對於日本，在數學課堂上花較多時間進行習題討論與分組活動。

本論文嘗試根據 PISA 測驗題，具體介紹國際學生評量計畫界定之數學素養，

分析概念主題相對應之數學素養能力要求；進而由各國學生之解題表現及各測驗題所包含之基本數學概念，總結兩輪測驗對各國教育文化及中、小學數學教育之影響。

貳、世界公民數學素養

檢測 15 歲學生是否儲備未來所需的各項能力與素養，為國際學生評量計畫之主旨。數學被 OECD (2002) 定義為一種工具、一種公民素養。上一世紀，中、小學數學教育比較偏重精英教育，課程設計之旨趣在培養少數的學生，為孕育科學家或專業科技人才做準備。隨著現代化、科技化的腳步，科學、數學在知識社會日趨重要，中、小學數學教育之目標亦隨而調整。

一、現象學取向

荷蘭數學教育大師 Freudenthal 的名言「學生不是學習『應用數學』，而是學習如何應用『數學』」(1970) (註三)，點出數學素養的概念。他從 1970 年代起呼籲由數學概念的實體現象教孩子學習數學，在《數學結構的教學現象學》(Didactical phenomenology of mathematical structures, 1983) 一書中主張在教學中運用「真實世界的問題，發展(學生的)數學概念」，學生學習數學時，透過漸次累進的基模化過程 (progressive Schematisierung)，組織普遍的數學概念，在物理世界、社會世界與思維世界的各種現象中以有效的心智模式

建立數學概念。

在這個認識之上，PISA 明確地與傳統學校課程要素區隔，採現象學取向 (phenomenological approach) 組織數學內容 (content)，以變化與關係、空間與形狀、量、不確定性四個概念 (overarching concepts)，將算數、幾何、代數、微積分學等十二個領域完全包羅進去。(註四)

PISA 定位「數學素養」(Mathematical Literacy) 為有能力去辨識、理解、探索數學在這個世界上的意義，解決私人生活、學校生活、工作與休閒、社區與社會中各種不同情境的問題，能解釋自己做出來的數學判斷，能夠進行邏輯思考，進而探索數學。(OECD, 2002) 素養一辭可追溯至盎格魯(Anglo-)英語世界中的教育論述「教給每個人每樣事物」(Tenorth, 1994)；在數學教材教法上「素養」指的是基礎的概念 (Winter, 1995)。在 TIMSS 測驗中「數學素養」首次出現為一個測驗學上的概念 (Orpwood & Garden, 1998)。根據國際經合發展組織 (2003) 擬定的架構，數學素養意指學生能意識到數學在生活世界的意義，在情境中做出有效的數學判斷，以一個建構、關懷、反省的公民態度，致力於解決生活上出現的數學問題。基於這個前提，PISA 測驗以生活中可能的情境 (context) 為主，將上述傳統基本多樣性的數學領域設計在個人休閒領域，或設計在教育、公共領域及來自於社會領域之情境問題，藉以確認學生是否有自信及好奇心去應用數學知能解決問題。

二、三個向度

PISA 由歷程 (processes)、內容與情境三個向度轉化數學素養為可評量的能力等級。如上節所述，情境向度涵蓋生活各領域；內容向度，由變化與關係、空間與形狀、量、不確定性四個大概念統整所有的傳統數學領域。歷程部份，PISA 將數學素養概分為再複製 (Reproduction)、聯結與統整 (Connections and Integration)、反思 (Reflection) 三個能力群組 (competency clusters)、六個能力等級 (level)。基礎群組評量學生是否具備基本計算、傳統定義與再複製的能力，中間群組評量學生統整基本概念、直線思考的能力，第三群組涉及數學思考、推論分析及提出問題之能力。最高等級，也就是第六個等級，期待學生能運用高層次思考與邏輯推理 (high-level thinking and reasoning skills, OECD 2004)，在不熟悉的問題情境中建立複雜的模式 (Mathematisation)，能掌握多程序、多層次的解題策略。教育學者以為 PISA 2000 要求 15 歲的青少年能具備異質性合作、跨領域思考等能力 (Böger, 2004)。

設計變化與關係等四主題內容時，預期參與測驗之九年級學生至少要達到第三個等級，即七年級以上程度。2000 年的 PISA 數學能力等級一，等同於小學四年級的計算能力 (註五)，等級二則屬於基礎數學的模式化，等級三相當於七到九年級的程度，等級四開始能建立基礎嚴謹的概念，等級五 (得分 696 以上) 已進入複雜

的數學格式，能掌握數學內部的連結。

平行對應中、小學的數學教育，2000 年 PISA 等級一的數學水準只具備國小四年級程度的算術、幾何知識，無法建立概念模式；等級三包含概念與模式。學生能力差兩個等級相當於一個學年級，換言之，能力等級二與能力等級四程度上相差一整年級的教材理解。相對於等級二，第三等級在質的方面提升很多，舉凡各個學校數學課本裏面標準的教材習題，都須要能夠通過；等級四要求能建立基礎嚴謹的概念及簡單的數學格式化；能達到最高等級五，代表學生掌握了較有深度的中學教材，如：二次方程式，同時能建構出邏輯縝密之數學模式。

PISA 這項政策促使學校將數學學習目標定位為：「將數學知識活用到生活情境的技能」，而數學的教學重點則傾向於培養學生：1. 會應用相關數學知識解決問題；2. 有能力檢驗自己解決問題時所應用數學概念之有效性。

參、主題內容

有別於傳統的數學評量，PISA 將能力區分為六級。內容方面，如前節簡述，涵蓋變化與關係、空間與形狀、量與不確定性 (Uncertainty) 四概念。由於 2000 年測驗的素養重點為閱讀，數學主題聚焦於「變化與關係」、「空間與形狀」前兩領域。下節僅就兩輪測驗相同的教材內容作一表現分析。以 2003 年「變化與關係」測驗題而言，波蘭、捷克、德國、比利時、韓國、

加拿大、芬蘭等十個國家之學生皆有極大的成長，這十個國家當中，在「空間與形狀」課題同樣顯著進步的國家依序有：比利時、波蘭、捷克。兩輪的國際教育體檢下來，幾個過去在國際教育舞台上不被關注的國家，如：芬蘭、比利時、捷克學生數學素養皆高出平均值甚多。

在 PISA 2003 四個數學主題的作答上，各國學生表現不一致。論述各國學生表現之強、弱項之前，本文先介紹各主題下相關單元題目及問題類型：

一、變化與關係

兩輪 PISA 皆出現「變化與關係」(Change and relationships)的主題。2003 年的題目裡，共有兩個情境、五個子題。數學概念四個主題中，各國學生在這個主題中表現差距最大，表現最好的國家有荷蘭、韓國、芬蘭等國。從 2000 年到 2003 年波蘭成功地在這個主題上拉近兩個極端等級的距離，整體成績也明顯提昇。相對於 2000 年，韓國九成以上學生 2003 年的表現皆高於 OECD 國家平均值以上。(表一為「變化與關係」主題的情境歸屬與題

型分佈)

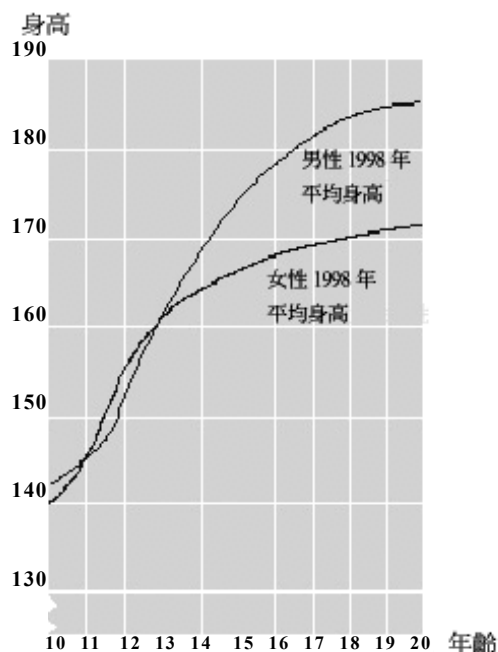
變化與關係的主題方面，「步行」題頗富轉折，儘管題目已提供一個「步伐」與「步速」之間的可能關係式，但是要正確求出等級六的答案，必須能在不熟悉的真實情境中解釋複雜的數學格式，也就是對步伐、長度關係式 $n/p=140$ 中每項 (n 與 p) 所代表的意涵充分瞭解，經過轉化，才能夠獲得正確的解答。(非文字部份參見圖六)

「成長」單元以 1998 年荷蘭兩性青少年的年紀與平均身高成長曲線圖為情境，評量 OECD 地區各參與國學生解釋年紀 (x) 身高 (y) 縱橫座標圖之能力。(見圖一成長)

測驗委員以為年紀與身高曲線關係圖是學生在生活中很熟悉的數學教材，這個單元要測驗學生能否理解成長速率曲線，解讀圖中 (女性) 平緩曲線的意義，如何以數學語言說出圖中傾斜、升降 (gradient) 呈現的成長意義；進一步掌握學生「應用數學概念解碼熟悉的表徵圖，如：「陡昇與趨緩現象」之能力。

表一：變化與關係

主題	變化與關係				
單元	「WALKING」步行 (2 子題)		成長 (3 子題)		
情境領域歸屬	私人		日常/科學		科學
題型	開放結構	開放結構	開放結構	開放結構	封閉結構
能力等級	六 (五, 四)	五	四	三	二



圖一：成長（摘譯自 OECD 2004，P.66）

「成長」單元的第 3 子題雖以女性的身高為背景，內容卻與題目中的曲線圖毫不相干，純粹為一文字應用題：「自 1980 年迄今，20 歲女性身高成長 2.3 cm，成為 170.6 cm，請問 1980 年 20 歲女性平均身高多少？」由於題目列在「成長」單元下，答題者很可能會受誤導，往身高曲線圖中尋找條件。

評量結果顯示，OECD 地區的國家，平均有四分之一以上受試者無法達到等級二（即上題要求之能力），他們缺乏解決問題的一般簡單程序。相對地，加拿大、德國達到五、六等級的學生比例則明顯增加。

二、空間與形狀

生活週遭隨處可見圖形結構，舉凡文字、建築、藝術等，無不充滿空間與形狀

（Space and shape）。PISA 2000 有概算南極洲面積、三角形要素等題目，2003 則有三個情境題，其一為「木匠」，二為「階梯」，其三為「骰子」（見表二）。三個情境題各涵蓋能力不一的問題，三個題組中，「階梯」最為簡單，已知總高度與階梯級數（14），求每一階的高度。題目上多畫出一個干擾性的資訊「深度」。命題委員以為類似於這個樓梯深度所呈現的「多餘」訊息，在日常生活事件中經常出現。題型為填充題，能力程度屬於第二級；木匠單元為教育相關情境，等級最難；「骰子」取材於休閒遊戲，其基本配備成人、小孩們常使用，屬於中等普通程度，三個單元的屬性及等級詳如表二。

表二：空間與形狀

主題	空間與形狀		
單元	木匠	階梯	骰子
情境領域歸屬	教育相關	日常	私人
題型	選擇題	填充題	選擇題
能力等級	六	二	三

「骰子」單元測驗第三等級，需基本的視覺與空間邏輯能力，不需要數學先備觀念。題目上先出現兩個實體的骰子，每面上分別標示 1~6 六個點數三維空間，並在題目中以文字說明骰子相對的兩個面的點數和永遠是七點，問題情境中呈現出四種骰子的展開圖（古典正方體展開圖），學

生根據展開圖上的點數分佈情形, (題幹中引導學生) 用剪裁、組合、拼貼或運用想像力等方式加以判斷: 展開圖是否符合「相對兩個面的和永遠是七點」之規則 (見附錄一)。

四個展開圖答案都正確, 該題才能得分, 學生立體幾何觀念必須正確清晰才能夠達到該題相當於能力等級三的能力。

如果用「木匠」單元情境題為例, 泰可說明數學素養中有關日常生活問題解決模式之一斑。「木匠」情境儘管不是一個典型的真實問題, 但是 PISA 命題委員認為解答這個題目的數學能力是相當基礎且重要的。該題難度上屬於最高等級第六級——「建立數學的關聯性」。

「空間與形狀」主題相對表現最好的國家為日本與芬蘭, OECD 地區參與測驗的國家中平均有 5% 的學生全部答對「空間與形狀」這三個單元題, 與我國相鄰的香港與南韓有高達 15% 的學生全部答對, 而泰國僅有不到 1% 的學生全部答對。對照於 2000 年, 比利時與義大利在第二輪測驗相同主題下進步可觀 (平均提升 28 分)。

三、量

「量」主題處理數現象、量大小關係和模式 (Patterns)。如同其他主題, 「量」主題共設計兩個不同的情景單元、六個子題, 分別取材自公眾與私人領域。(如表三) 公共領域單元為「兌換利率」, 故事背景為一個新加坡交換學生前往南非三個月, 期間的匯率損益問題。測驗委員以為學生們不一定有兌換外幣的經驗, 然而作為一個有智慧的全球公民, 這些數學知識素養是必備的。題目中分別有一個開放題, 兩個應用題。在開放結構題部分, 學生須應用知識解決數概念中的乘、除運算; 推理解釋當南非幣值升高時, 交換學生是否喜歡在這個時機點將南非幣換回新加坡幣。

「量」主題的另一單元題「滑板」, 為私人領域, 題目設計取自青少年文化, 涉及學生平日休閒活動。題目將滑板車構造的各組件, 以相片呈現 (如圖二), 附上價目表, 問學生 (1) 滑板有幾種組合可能? (2) 哪一種組合較經濟? 有限的預算下 (120) 如何組合出最高價位的滑板車, 本題共有四個系列填充題。(3) 組成最貴的和最實惠的滑板, 價錢各多少?

表三：量

主題	量					
單元	兌換利率 (3 子題)			滑板 (3 子題)		
情境領域歸屬	公共			私人		
題型	開放結構	填答	填答	選擇題	填答	填答
能力等級	四	二	一	四	四	三 (二)

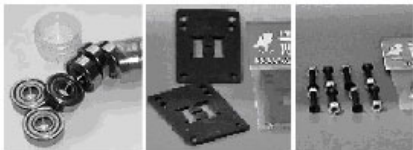
關於「滑板」的第一個子題組合可能，需要學生日常生活的一般邏輯能力或是會玩樹狀圖即可。第二子題要求學生以 120 塊錢組合出最貴的滑板車。學生可以用多種策略獨立判斷，展現出生活智慧經濟頭腦。PISA 數學素養將此類知能界定為聯結多個概念之能力（第二群組第四等級）。

在「量」主題的兩個單元上表現傑出的國家為芬蘭與香港；如同前面幾個主題，冰島是唯一一個女性表現優於男性的國家。

四、不確定性

PISA 以為進入知識經濟時代，擁有「不確定性」之數學素養愈趨重要；概念內容包含機率、統計現象（圖表）、數概算與關係性。荷蘭與香港特區這個主題表現領先全球。

德國評量專家與數學教育界分析 2003 年四個主題，發現機率（不確定性主題）是學生最弱的一環，而「量」概念在統計上有顯著表現。德國數學教育家們以為學生表現的強弱適度反應出德國學校教材編排的比重。

產品	價錢	
滑板	82 or 84	
底板	40, 60 or 65	
一組滑輪	14 or 36	
一對	16	
每組軸承	10 or 20	

圖二：滑板(摘譯自 OCED 2004，P.76)

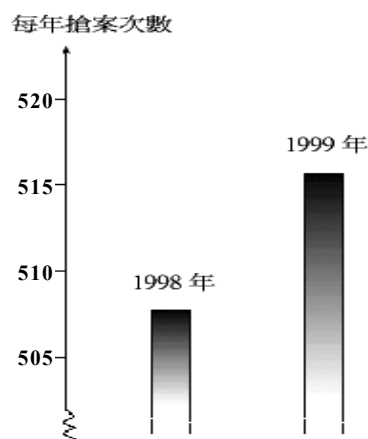
「不確定性」主題內容涵蓋三個題組。題目分別以長條圖或加上圓形統計圖表呈現，計有公共領域與教育兩領域，有 2 個單元題為開放式結構，要求受試者陳述圖表上的統計意義，以學生陳述溝通之論點判定相符應之等級。(表四為此主題 3 個單元之性質與素養等級，四個子題，分屬 6、5、4、2 等級)

「搶案」題屬於公共領域，測驗委員會以為知識社會的時代中，學生常有機會接觸閱讀到圖表，在日常經驗中應該能閱讀統計圖表。這既屬數學概念，更是一種媒體素養。此單元能力等級定為四或六，係與學生回答時能否解碼圖表，進而指出弔詭關鍵點，看出或說出題目中新聞播報員(不合理)推論：「搶案從 1998 到 1999 一路攀爬」時所根據的統計與比例概念。(見圖三)

若只看 1998 年和 1999 年呈現的柱狀圖高低差距(如圖三，取自真實資料)，受試者很容易認為：兩年的搶案確實差了那麼一大段。因為，相對於 1998 年，1999 年搶案次數攀高；但學生仔細對照 Y 軸所標示的數據，會發現 510、515 兩數字的差距為 5，在刻意操作 Y 軸下，兩數字間的視覺距離拉大客觀數差；1998 年搶案次數約為 508 次，1999 年搶案次數約為 516 次，兩者差距約 8 次，8 次相當於 508 次的 1.6%，並非如電視新聞記者聳動報導的 1999 年搶案次數劇增。

表四：不確定性

主題	Uncertainty			
單元	搶案	測驗分數	外銷(2子題)	
情境領域歸屬	公共	教育	公共	
題型	開放結構	開放結構	選擇	封閉結構
能力等級	六(四)	五	四	二



圖三：搶案(摘譯自 OCED 2004, P.82)

「測驗分數」單元為熟悉的考試情境。題目為一個班級兩組學生科學測驗之分數分佈統計圖，要求學生解釋 A 組或 B 組考得好或壞之依據。

就「不確定性」主題測驗而言，由於「搶案」與「測驗分數」兩個情境單元，題型屬於開放結構，要求受試者閱讀統計圖表、縮尺後，說明立論依據，轉化題目

中的長條圖，以個人論點作出數學上的合理解釋。整體而言，OECD 國家達到等級六的學生計 4%（香港地區三倍於此，高達 13%）。等級六代表學生能運用高層次思考及推理技巧解決統計或機率的概念，能創造出真實情境的數學表徵；能洞察、反思（reflection）處理轉化問題，這些優秀的學生能系統化解釋自己的論點，並且與他人溝通自己建立的複雜模式。有 13% 的學生達到等級五，也就是說每 8 位受試者當中至少有一位會應用統計、機率知識去解決半結構性問題。他們會推理、洞察，說明、分析既有的資訊，發展出適當模式並計算之，也會與他人溝通理由與論點。（OECD, 2004）（註六）

達到素養等級三的受試者計 54%，符合平均值，這表示 OECD 地區一半以上的受試者，能運用不同表徵，能解釋統計資訊及資料，會連結不同之資訊來源，用機率的概念、符號或規則作基本的推理，也能與他人溝通理由。

四個主題分析下來，表現最好的國家為芬蘭、荷蘭、香港與韓國。國家平均值最高分與最低分差距甚大（註七）。比利時第六等級的優秀學生百分比則遠高於 OECD 平均值；而美國的受試者，逾 1/4 落在第二等級甚至達不到這個等級。據 OECD 專家推論，這些學生無法完成學校教育，他們未來的就業生涯也不樂觀。就性別而言，男性在第六等級的人數皆高於女性。冰島則是例外。

肆、例題分析

分析 PISA2000 年的內容，數學題目約佔總測驗份量的 1/3（註八），相關數學概念分別設計為農舍、三角形、蘋果樹、賽車、南極洲等題組。農舍為幾何教材中典型的應用題，概算南極洲面積題目應用了課本教材，但用不尋常的方式設計問題，屬於空間與形狀；蘋果樹為級數問題，屬於變化與關係概念。解題上皆強調情境處理與邏輯推理之能力。茲舉 PISA2000 和 PISA2003 之數學例題，說明數學素養對不同等級能力之要求。

一、計算與再複製能力

（Reproduction, definitions and computations）

（一）兌換利率－計算能力

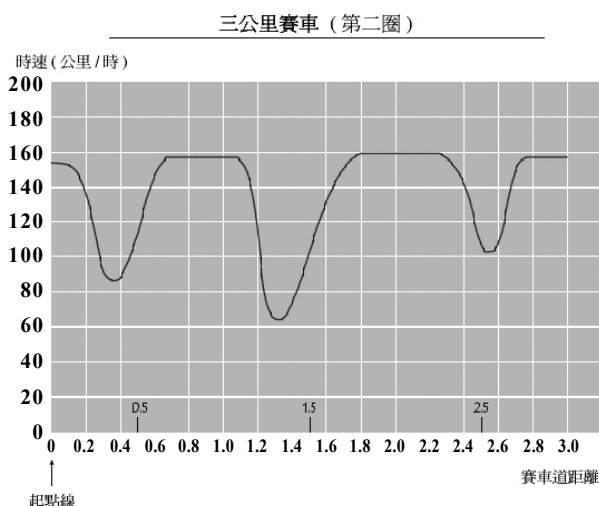
PISA 2003「量」主題的「兌換利率」第三子題，旨在測試數學素養中最基本的計算能力。情境中新加坡幣對南非幣的匯率為 1 新幣兌（=）4.2 南非幣，以此匯率，交換學生 Mei-Ling 的 3000 新加坡幣可兌換多少南非幣？

基本上這是一個乘法計算題（等級一）。運用到被乘數為一位小數的乘法運算，是一道簡單的數學應用題。

（二）賽車－解碼圖表、辨識定義之能力

2000 年的賽車題屬於科學領域，不與課本特定教材直接關聯，卻考驗著學生掌握速率概念、判析研讀曲線圖表之能力（如圖四）。

學生要能從圖四座標曲線中解讀出加速、減速的線段，解決此單元的 2 個基本問題，相當於簡單的再複製能力等級。



圖四：賽車 (摘譯自 OCED 2004, P.95)

第一題：「最低速度是哪一段？」

答案選項：(A) 起點，(B) 約在 0.8 公里處，(C) 約在 1.3 公里處，(D) 半圈以後。

第二題：「從 2.6 公里到 2.8 公里，這一段你可以怎麼描述。」

要求學生用文字描述、溝通解釋圖形中曲線變化的意義。

二、聯結統整能力 (Connections and integration for problem solving)

(一)「賽車」單元第三子題—統整與解碼能力

延續同樣的賽車情境，題本上呈現幾個可能的、虛擬的車道鳥瞰圖後 (詳見附錄二)，另有一高難度題，要求受試者讀圖，回答：「A.B.C.D.E 五個鳥瞰圖中哪一個相當於前面賽車速率座標的路線圖 (圖四)？」

2003 年的試題反映出資訊科技社會所需要的能力，無論解讀文字或非文字 (圖表) 的數學題幹，本身皆潛藏了極大部分的閱讀與轉化能力。值此，幾個國家中學生的數學素養與閱讀素養皆呈高相關，數學能力排名與閱讀表現幾乎屬同一級別。具備各樣社會議題相關的基礎知識有助解決數學情境題，受試者閱讀資料圖表後，需運用相關的概念與題旨溝通。

(二)「蘋果樹」例題—統整古典數學概念

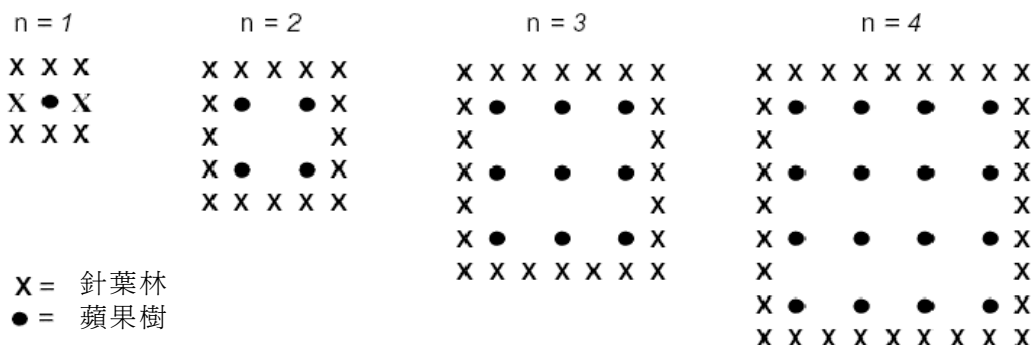
蘋果樹 (PISA 2000) 有三個子題，題本上有一段文字：「一個農夫將他的蘋果樹以正方形圖形栽種，為防止風將蘋果樹吹垮，於是在蘋果樹的周圍種滿了松樹 (針葉樹) 以防風害」。(同時呈現正方形數圖四個：如圖五)

學生需回答三個不同層次之子題，其中第一、二題屬於統整概念的能力等級，茲摘譯如下：

1. 子題一：

要求受試者完成下表 (等級三)。

N	Number of apple trees	Number of conifers
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		



圖五：蘋果樹(摘自 OECD 2002, P.89)

在這個子題上，有小部分教學提示：「當蘋果樹 1 棵時，松樹為 8 棵，當蘋果樹 4 棵，松樹共幾棵？」受試者須填答上表中 7 個空格。

數學教育者分析學生答錯的原因不一而足：低估、作答太快、角落數了兩次、缺乏數算系統...等。

2. 子題二：

蘋果樹總共 n^2 棵，松樹共 $8n$ ， n 棵代表蘋果樹的行數，求 n 值。

此一尋求規律性之問題屬等級四，要求學生運用數項、線性與幾何級數表徵情境，理解古典數學，表現創造力與嘗試的動機。

(三)「兌換利率」第一子題 (等級四)

一 反省與溝通的數學思考

作為一個有智慧的理財者，用兌換外幣的經驗切入，毋寧再自然不過了。關於數學知識素養，題目中要求受試者在開放結構題部分，須應用反省思考的知識解決

數量概念中的乘、除運算；將內容情境簡約為數運算，解釋當新加坡幣兌 4.2 南非幣變為 4.0 時，交換學生在這個時機點上將南非幣換回新加坡幣合宜與否？

三、洞察數學模式

(Mathematisation, mathematical thinking, generalisation and insight)

發現情境中的數學格式為數學素養中最具創造性、最好的能力，以下各由 2000 與 2003 各舉一例說明其命題之一斑。

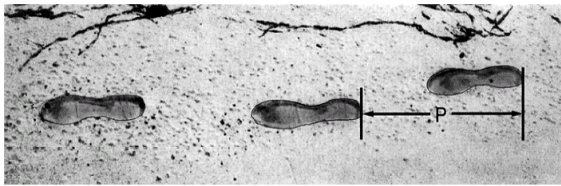
(一)「蘋果樹」子題三 (等級五) — 建構古典幾何級數意義

假設農夫要栽種一個比較大的果園的話，什麼樹會增加得很快，請說明原因。

類此素養等級要求學生洞察真實（特別是不熟悉的）情境中，建構數學模式，以文字描述，向他人解釋解題的歷程。就蘋果樹單元的子題三而言，PISA 期待學生能洞察蘋果樹成平方數快速遞增，而松樹卻是線性的；預期學生能內省該題題旨，創造解題策略。

(二)「步行」單元－建立複雜的數學模式

圖六為 2003 年「變化與關係」主題中「步行」單元之示意圖。圖中呈現步行足跡，若兩個連續腳步的後腳跟距離以 p 表示。每分鐘走的步數以 n 表示， p 為步距（公尺），且可用公式 $n/p = 140$ 描述男性步數與步距之間的關係值。



圖六：步行（摘自 OCED 2004，P.64）

1. 子題一：

如果今天 Bernard 知道他的步伐長為 0.8 公尺，且亦可用上述公式來求算 Bernard 的行進速度，請計算出他的走路速度，並以（公尺/分鐘）與（公里/小時）兩種不同的單位表現之。

等級六（總分 3 分）：算出兩個正確答案－

89.6（公尺/分鐘）與 5.4（公里/小時）。

等級五（得 2 分）：

1. 正確算出 89.6（公尺/分鐘）但將單位轉換成（公里/小時）時發生錯誤。
2. 列式正確但計算錯誤。
3. 只算出其中的一個答案。

等級四（得 1 分）：只算出 $n = p \times 140 = 0.8 \times 140 = 112$ 。

2. 子題二：

適用同一公式。如果 Heiko（女生）每分鐘走 70 步，請問她的步距是多少？

變化為生活中尋常不過的現象。「步行」單元的題目取自學生在生活中很容易體驗到的距離、速度及其間的關係。PISA 委員會特別指出在雨天或沙地上，人們對於自己所留下的足印並不陌生。如果能在這些平凡的日常生活現象中發現數學關係，並且進一步生產、創造出新知識，則可保證 PISA 想要的數學素養。（Fischer & Malle, 1985）

就傳統的數學教材之界定，「步行」單元屬於代數，傳統教學會要求學生將已知數代入公式先求出 n 值，步距再乘上 n 得出每分鐘行進的速度。

第三群組強調應用、轉化傳統數學教材概念到各種情境（公共、教育、私人與遊戲情境）問題之重要性，旨在檢測學生是否具有再生產、再創造，甚至於再建構數學模式之能力。

綜觀四個數學主題脈絡，可發現其文化統整之意圖，諸如將行業如工、農、商、教皆摘取入題，活動設計包涵了休閒、工作、學校生活與國際貿易等層面。往上觀察，更可察知測驗題儘可能平衡了歐、亞、非洲（如查德國）等多元文化。

伍、全球化教育之後一代結語

兩輪 PISA 下來，全球各大洲，數十個不同文化、不同教育體制國家的學生成就一目了然，網路科技的進展，讓我們即時進入各國教育脈絡與論壇。評量結果在國際間引起不同程度的漣漪效應。丹麥檢視其他國家的情形後，發現自己投資在教

育上的經費比例與學生學業成就不甚符合 (Rangvid, 2003)；德國學生低於 OECD 平均水準表現，整體落後芬蘭一至一個半年級，全民以國恥喻之，痛而積極檢視傳統學校制度與國內數學等核心課程；荷蘭、澳洲幾個排名前面的國家公開肯定學生的數學學習信念。美國學生儘管表現不佳，除了全美數學教師協會對於各州未能落實課程標準抱憾以外，國家整體維持中性沒反應的情緒。

參與測驗之國家依據以上兩輪國際比較的調查結果，大幅度調整教育政策，上至國家教育標準，小至學校課堂教學策略，皆在變動中。茲舉犖犖大者分述如下：

一、教育價值與文化差異

芬蘭、韓國一半以上的學生表現在四等級以上(洞察數學模式)，墨西哥、印尼、突尼西亞只有不到百分之三的人進入等級四，明顯可讀出國與國之間主流文化價值發展相異之處。若由以上國家的事實論述，調查結果確實呼應 OECD 的測驗假設，即「學生數學學習成就高低與國內生產毛額 (GDP) 多寡成正比」。然則，學生的能力表現，雖然符應 OECD 解釋墨西哥等國「未教育好他的公民，面對未來世界的挑戰」；卻更指向，國家文化與社會主體對教育的信念、對教師、學習乃至教材(課程)所賦予的價值觀左右著教育文化表現的強弱。(註九)

題目中以荷蘭、新加坡及南非等歐亞國家的文化作為情境脈絡，內容取材展現

出 PISA 跨越國家疆界的強烈意圖，顯示大型教育測驗全球化的現象，呼應了國際比較教育的趨勢。然則，測驗試題中以木匠 (DIY 實作文化)、骰子(休閒活動)或賽車文化(體育競賽)為背景的思維或許鮮少在西方以外的學校數學教育中論及。再者，受試者所在的國家文化、社經發展，如學習生態的脈絡與家庭教育價值能否提供足夠的文字資料書籍、創造第三扇文化傳媒與電腦相關圖文(如接觸統計圖表資訊之機會)，在在關係著數學素養之表現。此外，學生數學學習信念也值得觀注，南半球的澳洲學生在問卷中對數學學習表達較高工具性動機，即澳洲中學生們咸認為學好數學以後就能找到好的工作。

二、建構國家教育標準

測驗結果公佈後，全美數學教師協會 (NCTM) 於 2004 年 12 月聲稱，他們早在 1989 年首次公布數學課程標準時，就將解題能力列為數學教育的第一目標。McCarty 在《美國國家教育標準要件》(Components of National Education Standards in the United States) 文中指出 Goals 2000: Educate America Act (註十) 已經呼籲各州改善學校教育，要求法令規範學生評量需與數學、科學與歷史教育標準連結，保證學生有機會習得教育標準與策略，教育部並且要求提早由學校低年級開始實施。

PISA 提供各國學生成就評量的實證資料，為比較教育研究揭櫫了一個新的里

程碑。PISA2000 表現較佳的幾個國家，對於學生學習成果的追蹤評鑑與國家教育標準的建立都行之有年。結果出來後，澳洲政府積極運用此資料提昇其教育標準，同時以 PISA 的數據資訊調整學校教育之核心評量架構 (Key Performance Measures, 詳見 Thomson, Cresswell & Bortoli, 2004)。芬蘭、澳洲爲了強化問卷顯示出的優勢「具有面對未來的能力」(Facing the Future)，充分掌握國內教育系統和各地區間的差異，進行國家本位的測驗。

表現不盡如意的德國，在學校教育史上既未曾大規模地對學生的學習成果進行追蹤評鑑，也沒有訂定中央層級教育標準。在 PISA 2000 後，德國終而形成國家教育標準必要性之論述(Klieme, 2004)。爲了提昇 PISA 2006 的科學素養能力，德國各邦政府全面協商，修訂數學、語文及自然等核心課程，更於 2004 年起推出學校課程評鑑 (周玉秀，2006)。

三、重定數學意向課程 (intended curriculum) (註十一)

各國學生在「空間與形狀」、「變化與關係」、「量」與「不確定性」四領域表現互有差距，提供課程決策者審視國家意向課程強弱的重要資訊。澳洲、加拿大、德國、法國、日本在四個領域的表現差別很大，引發數學教育者探究其課程發展與設計。具體而言，瑞士在「空間與形狀」、「量」分別得到第三名及第四名，在「不確定性」卻只得到十二名。日本學生空間與形狀主

題表現最佳，機率、統計圖表等「不確定性」範疇則相對較弱 (註十二)；紐西蘭學生對不確定性主題有傑出能力。它既反應國家意向課程之成效，同時指出意向課程需重新著重的部分。整個測驗結果呈現出各國中、小學體系/制度選擇不同的特色建構其國定意向課程，這將提供各國中、小學參酌現階段其他國家學生之能力特色，重而調整制訂國家等級課程特色。

我國透過基本學測掌握課程實施成效，有效檢核 89 年數學課程綱要 (65%) 與 92 年課程綱要 (35%) 之教材，落實學校課程發展，在實質上，有著與國際學生評量計畫接軌之意，惟國家意向課程之落實仍待評估。

四、發展教學策略

PISA2003 的調查結果有助於各國檢測其學生在各主題內容下表現之等級與學習狀況。問卷調查指出，瑞典和紐西蘭同一所學校內學生異質性最高，或許由於能力差距相當大，學生得以彼此教導與學習。相對的，在德國或土耳其，下層社會結構的學生，PISA 分數相對的低，這也就是說，社會再製現象已經在 15 歲學生身上可預期；進入不同類別的中學，幾乎已可預估其學習成就，學生很難在對等的學校中發展其潛在智慧能力。(註十三)有鑑於此，德國教育當局要求學校落實班級分組教學，重新協助教師輔導學生 (從小學起！) 建立良好之閱讀與學習文化。

檢核學生數學素養的同時，測驗專家

應用問卷研究學生的解題策略，他們發現 PISA 2003 的學生分別運用後設學習（metacognition）、記憶（memorisation）與精緻（elaboration）等三種策略解決問題。問卷中，有 87% 的受試者表示他們解題時嘗試找出問題中最重要的部分，73% 的學生表示看到題目時，會先確認、回憶他們是否曾經做過這類型的數學作業，有 69% 學生同時圈選問卷選項：沒辦法理解題意時會在題幹中找出關鍵的資訊。特別的是，當研究分析進一步指出：學生願意（interest）思考探索新問題，有耐心閱讀數行之長的數學文字題，願意解碼數學圖表或抽象公式者，在 PISA 的數學素養各等級表現上均佔有一定優勢時，教師的教學與學生的學習策略益形重要。

PISA 著眼於全球化教育，數學問題按概念、歷程取材自知識經濟社會的議題與實體現象。當國家數學教育或課程趨勢相對掌握此脈絡，各級學校教師教學時挑戰將相關概念組織轉化到教材中，引導學生統整性學習，則學生參與國際大型教育測驗自然能展現實力與能力。

五、現象取向的情境數學

基於 PISA 數學素養的概念，許多國家的中、小學數學教育開始轉變，過去建立的傳統學校數學測驗在 PISA 數學素養調查後幾乎完全被顛覆了。教師專業團體放下過去「單一面向」的思維，不再只是在一個單元下教導線性主題（如在「倍數」單元下處理公倍數概念），嘗試著引導學生

在真實（擬真）情境下，處理轉化多個相關數學概念。

在真實數學（Realistic Mathematics）教育的信念下，傳統數學教材上的算術、代數、幾何及相關概念等結構性教材，可以由不同情境中摘取而得。PISA 出題靈活多元，同一組題目，分別要求學生能夠：

1. 閱讀題幹，簡約問題情境為數學概念等基本計算能力，發現單一數學模式之能力（封閉性文字題為主，標準唯一的答案）。
2. 統整幾個數學基本公式解決問題之能力（選擇題或開放性結構）。
3. 建立複雜多個數學模式，並且掌握數學內部結構等能力（開放性結構或多項式選擇）。

兩輪調查研究後，教師重新研究過去的教材筆記，將傳統教材中多個主題相異歷程，發展成個別情境問題；問題的類型由封閉轉向開放，解題的途徑由一元趨向多元。

六、掌握國際評比

香港地區首次參與第二輪（2003）的國際學生評量計畫，和日本、韓國兩個亞洲國家一樣，學生整體表現非常傑出，由於取樣統計技術，香港地區和韓、日兩國同列前三名，荷蘭緊跟其後，居第四名。香港地區重視 PISA 的程度，值得我們觀察。他們於 2003 年出版專輯探討 PISA 對國際數學教育的影響與效應，並且對表現傑出國家教育系統之運作進行理解與議題

探討。(Wong, 2003;-V-Wu, 2003)

反觀國內，在積極參與 2006 年國際學生評量計劃 (TPISA) 之際，學校主體對該測驗主張之數學素養、背後之信念掌握的資訊仍嫌不足。自我概念、學習數學的興趣、對數學抱持正面的工具性動機、解題策略交互影響著學生的數學表現。數學不再是班級精英的專屬學科，數學可以是學生解決生活問題的功能性語言，學校教育宜啟發學生把數學學習視為生活工具，由情境問題中建立基礎嚴謹的數學概念。若能在此信念之上，轉化數學素養之程序與內容於教材中，淺入深出，當可厚植學生解決各類型數學情境的基本興趣，敏於探索課堂上未教導之問題概念。

註解

- 一、中歐小國，全國只有 50 名警察執國防役。
- 二、平均值 500 分，標準差 100。
- 三、Fortbildung der Lehrerinnen und Lehrer in NRW(2006). Was sind die Aufgaben des Freudenthal- Instituts? 上網日期 2006 年 6 月 30。
<http://www.learn-line.nrw.de/angebote/medienmathe/verweise/nl/nlinfo/fiinstitut.htm>
- 四、譯自 OECD 2002, P. 84f。
- 五、PISA 2000 等級一得分介於 329-420 之間，等級二具備基礎數學的模式化得分介於 421-511，等級三得分介於 512-603，等級四能建立基礎嚴謹的概

念得分介於 604-695。PISA 2003 每一等級差 62 分。

六、85 頁。

七、兩平均值差 159 分，相當於兩年半學校年級。OECD 2004, P 59f.

八、相對於 PTSA 2000，PISA 2006 數學題僅佔 1/4。

九、韓國學生看重學識與受教育的行為。詳細分析可以詳見 OECD 2004, P.157f。

十、1994 年法案，旨在提供各州及社區資源確保學生學習品質。

十一、數學意向課程之概念可參考 OECD 2004, P.90。

十二、日本學生四領域分別得 553, 536, 527, 528，強弱項間差 27 分。OECD 平均值 500 分。

十三、資料參考自 OECD 2004, P.159。

參考資料

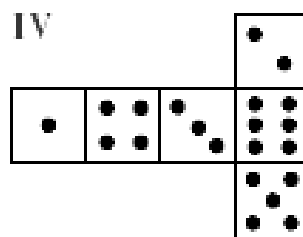
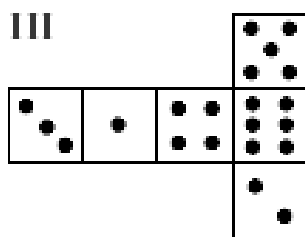
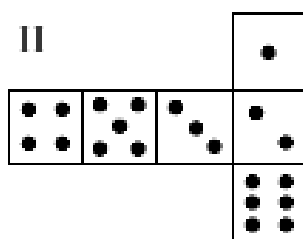
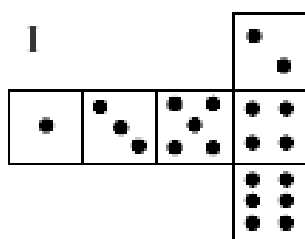
- 周玉秀 (2006)。德國教育評鑑趨勢。教育研究月刊, 148, 113-120。
- Böger, K.(2004). Priorität Bildung. Berlin. 上網日期:2005 年 9 月 30 日。
- Fischer, R & Malle, G. (1985). Mensch und Mathematik. Bibliographisches Institut:Mannheim.
- Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht:Reidel.
- Givvin, K., Hiebert, J., Jacobs, J., Hollingsworth, H., Gallimore, R. (2005). Are There National Patterns of Teaching? Evidence from the TIMSS 1999 Video Study. Comparative education review, 49(3), 311-343.
- Goldstein, H. (2004). International com-

- parisons of student attainment: some issues arising from the PISA study. *Assessment in Education* 11(3), 319 – 330.
- Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, P., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E., und Vollmer, H. J. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards*. Bonn : Bundesministerium für Bildung und Forschung
- McCarty, Carolyn A. (2005). *Components of National Education Standards in the United States*. <http://www.ed.gov/pubs/Research5/UnitedStates/standards.html>. 上網日期：2005 年 9 月 30 日。
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (2004). *PISA Report Highlights Need for All U.S. Students To Receive an Equitable Education in Math*. 上網日期：2006 年 9 月 5 日。
- OECD (2002). *Programme for International Student Assessment*. 上網日期：2006 年 9 月 5 日。
- OECD (2003). *PISA 2003 Brief Description of Assessment Frameworks in Mathematics, Reading, Science and Problem Solving. Knowledge and Skills*. <http://www.erc.ie/pisa>.
- OECD (2004). *Learning for Tomorrow's World. First Results from PISA 2003*.
- Thornson, S., Cresswell, J., De Bortoli, L. (2004). *Facing the Future: A Focus on Mathematical Literacy among Australian 15-year-old in PISA 2003*. www.pisa.oecd.org.
- Orpwood, G., & Garden, R.A. (1998). *Assessing Mathematics and Science Literacy (TIMSS-monograph No.4)*. Vancouver: Pacific Educational Press.
- Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rolf, H.-G., Rost J. & Schiefele, U. (Eds.). (2004). *PISA 2003. Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Zusammenfassung*.
- Rangvid, B.S. (2003). *Educational Peer Effect Quantile Regression Evidence from Denmark with PISA 2000 Data*.
- Tenorth, H.-E. (1994). *Alle alles zu lehren: Möglichkeiten und Perspektiven allgemeiner Bildung* (6 ed). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Välijärvi, Jouni (2003). *The System and How Does It Work: Some Curricular and Pedagogical Characteristics of the Finnish Comprehensive School*. *Education Journal*, 31(2), 31 – 55.
- Waks, Leonard J. (2004). *Globalisierung, Staatstransformation und das Bildungssystem.. In: Engagement Zeitschrift für Erziehung und Schule. Heft 4, 2004. 324-335*.
- Winter, H. (1995). *Mathematik- unterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 37 – 46.
- Wong, Ka-Ming Patrick (2003). *Mathematical Literacy of Hong Kong's 15-Year-Old Students in PISA*. *Education Journal*, 31(2), 91 – 120.
- Wu, Margaret (2003). *The Impact of PISA on Mathematics Education: Linking Mathematics and the Real World*. *Education Journal*, 31(2), 121 – 140.

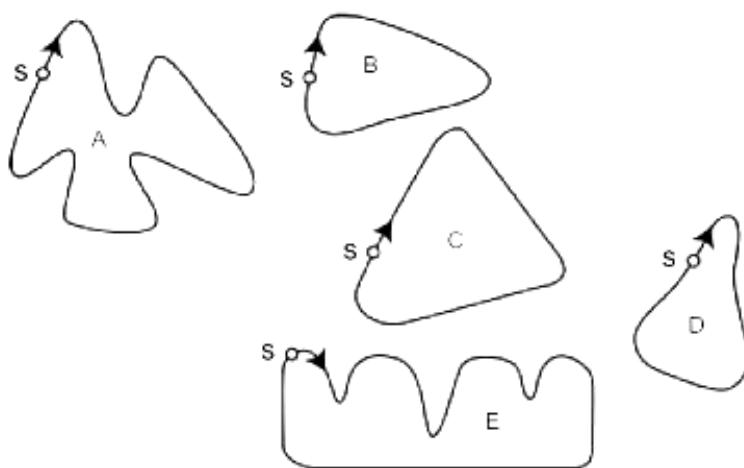
投稿日期：95 年 02 月 21 日

接受日期：95 年 08 月 14 日

附錄一



附錄二



S: Startlinie

Reviewing Math Literacy and Education by Means of PISA

Yu-Hsiu Chou

Department of Education, National Taipei University of Education

Abstract

The study, focusing on math literacy defined by OECD in 2003, reviews the PISA results taken from 41 countries with some contextual tasks and identifies the knowledge and basic skills students should have. Theoretically, OECD assumes that the student achievement and GDP should show a direct proportion; however, it is nonlinear. The 15-year-old students' performance is not as expected in some economic countries. The thesis, by means of relative solutions analysis, explores how math literacy is implemented on curricular level as well as its teaching rationale.

Keywords: PISA, mathematics literacy, space and shape, change and relationship, uncertainty