不盡相異物的環狀排列公式

王世勛 [1*] 李陽明 [2]

[1] 臺北縣私立復興高級商工職業學校
[2] 國立政治大學 應用數學研究所

壹、緒論

高中數學的排列組合課程中,排列公式如下：

(1) m 個相異物不重複取出 n 個排成一列的方法數爲 P_n^m

(2) m 個相異物可重複取出 n 個排成一列的方法數爲 m^n

(3) k 類物品 $x_1, x_2, ..., x_k$ 依序有 $m_1, m_2, ..., m_k$ 個,其直線排列數爲 $\dfrac{(m_1 + m_2 + ... + m_k)!}{m_1! \times m_2! \times ... \times m_k!}$

(4) n 個相異物之環狀排列數爲 $(n-1)!$

但不盡相異物的環狀排列公式完全未提及,形成一個缺口,我翻遍所有版本的數學教科書及參考書,都沒有提到這個課題,於是就想說能不能發現它的公式,把高中排列組合的這個缺口補起來。這就是我的研究動機。

本篇論文找到不盡相異物的環狀排列公式,高中生可以理解並容易使用,期望能對高中數學的排列組合領域作出貢獻。

* 爲本文通訊作者

定義一：

排成一列的物品若由 k 個物品複製 t 次構成,若 t 爲最大值,稱此 k 個物品爲一循環節,簡稱 k-循環節。

例：

22222222 由 1-循環節 2 複製 8 次構成

121212121212 由 2-循環節 12 複製 6 次構成

112112112112 由 3-循環節 112 複製 4 次構成

1234567 由 7-循環節 1234567 複製 1 次構成

定理一：

循環節內不會再有子循環節。

【註】循環節內物品作直線排列有可能會產生子循環節。

證明

假設排成一列的物品由 k-循環節複製 t 次構成，t 爲最大值，若 k-循環節有 s 個子循環節，則原排列由 $\dfrac{k}{s}$ 個物品複製 $t \times s$ 次構成，$t \times s > t$，這會產生矛盾(因爲已知 t 爲最大值)原假設錯誤，故得證循環節內不會再有子循環節。

【註】111122 這個循環節沒有子循環節，將 111122 作直線排列有 15 種情形，其中有 3 種產生子循環節(**粗體字**)

111122	111221	121211
111212	112121	**211211**
112112	**121121**	122111
121112	211121	212111
211112	112211	221111

所以循環節內物品作直線排列有可能產生子循環節。

定理二：

k 類物品,每類依序有 $x_1, x_2, ..., x_k$ 個, $(x_1, x_2, ..., x_k)$[註] $= d$ ，則 d 有正因數 $w_i \Leftrightarrow w_i$ 為直線排列可能之循環節個數。

【註】$(x_1, x_2, ..., x_k)$ 表 $x_1, x_2, ..., x_k$ 之最大公因數。

證明

$(\Rightarrow)$ $(x_1, x_2, ..., x_k) = d$,

則 $d \mid x_t, t = 1,2,3,...,k$

已知 $w_i \mid d$,所以 $w_i \mid x_t$,

令 $x_t = w_i \times h_t$,則 k 類物品依序有 $w_i \times h_1, w_i \times h_2, ..., w_i \times h_k$ 個,此 k 類物品可視為由 $(h_1 + h_2 + ... + h_k)$ 個物品複製 w_i 次構成,將各類物品依同類相鄰的原則排成一列依序為

$$\underbrace{a_1, a_1, ..., a_1}_{(h_1\text{個})}, \underbrace{a_2, a_2, ..., a_2}_{(h_2\text{個})}, ..., \underbrace{a_k, a_k, ..., a_k}_{(h_k\text{個})}$$

假設這樣的排法會使循環節具有子循環節，則這個子循環節的開頭必為 a_1 ，結尾必為 a_k ， 這會造成下一個子循環節的開頭 a_1 等於 a_k ，產生矛盾(因為已知 $a_1 \neq a_k$) ，原假設錯誤，所以

$a_1, a_1, ..., a_1, a_2, a_2, ..., a_2, ...,$

$a_k, a_k, ..., a_k$ 不會有子循環節，原 $\sum_{t=1}^{k} w_i \times h_t$ 個物品由沒有子循環節的 $(h_1 + h_2 + ... + h_k)$ 個物品複製 w_i 次構成，共 w_i 個循環節,所以 w_i 為直線排列可能之循環節個數，得證。

$(\Leftarrow)$ w_i 為直線排列可能之循環節個數，

$x_t = w_i \times h_t (t = 1,2,3,....,k)$

$\Rightarrow d = (x_1, x_2, ..., x_k)$

$= (w_i \times h_1, w_i \times h_2, ..., w_i \times h_k)$

$= w_i \times (h_1, h_2, ..., h_k)$

$\Rightarrow d$ 有正因數 w_i ，得證。

例 ：

111111111111222222222222 排成一列，1,2 各有 12 個，(12,12) = 12， 而 12 之正因數有 1,2,3,4,6,12

所以 111111111111222222222222 直線排列可能有：

1 個循環節: 111111111111222222222222

2 個循環節: 111111222222 111111222222

3 個循環節: 11112222 11112222 11112222

4 個循環節: 111222 111222 111222 111222

6 個循環節: 1122 1122 1122 1122 1122 1122

12 個循環節: 12 12 12 12 12 12 12 12 12 12 12 12.

定理三：

若排列有 e 個循環節，每一循環節的循環排列複製 e 次得一新排列,則此二種排列對應到同一種環狀排列。

【註】n 物排列若有 w_i 個 $\dfrac{n}{w_i}$ -循環節，每個 $\dfrac{n}{w_i}$ -循環節有 $\dfrac{n}{w_i}$ 種相異循環排列，此 $\dfrac{n}{w_i}$ 種循環排列複製 w_i 次對應到同一種環狀排列。

證明

環狀排列有 e 個 n-循環節,指定其中任一物爲起點，順時針方向前進，會經過環上所有物品，出現順序形成一循環排列，所有情形如下：

$$a_1a_2a_3.....a_n\ a_1a_2a_3.....a_n \ldots a_1a_2a_3.....a_n$$
$$a_2a_3a_4.....a_1\ a_2a_3a_4.....a_1 \ldots a_2a_3a_4.....a_1$$
$$\vdots$$
$$a_na_1a_2...a_{n-1}\ a_na_1a_2...a_{n-1} \ldots a_na_1a_2...a_{n-1}$$

假設其中有任二者相等,不失一般性,令重複出現的是 $a_1....a_n$, $a_1a_2...a_n$ 在之後的第 k 個第一次重複出現 $\Rightarrow a_1....a_n = a_{k+1}...a_k$,又已知 $a_1....a_n$ 在之後的第 n 個會重複出現,因爲 n-循環節沒有子循環節,所以將 n 除以 k 必不能整除，有餘數 r $\Rightarrow$ $0 < r < k \Rightarrow$ $a_1...a_n$ 在之後的第 r 個重複出現，這會產生矛盾(因爲這會導致 $a_1...a_n$ 在之後第 k 個並非第一次重複出現) $\Rightarrow$ 原假設錯誤 $\Rightarrow$ 無任二者相等才是正確。

由以上得知， n 物排列若有 w_i 個 $\dfrac{n}{w_i}$ -循環節,每個 $\dfrac{n}{w_i}$ -循環節有 $\dfrac{n}{w_i}$ 種相異循環排列，此 $\dfrac{n}{w_i}$ 種循環排列複製 w_i 次對應到同一種環狀排列。

例一:

12331233 1233 由 4-循環節複製 3 次構成，每一循環節內有 4 個物品，則：

1233 1233 1233

2331 2331 2331

3312 3312 3312

3123 3123 3123

上述 4 種直線排列對應到同一種環狀排列，且每一種直線排列由一 4-循環節的循環排列複製 3 次構成。

例二:

112233 由 6-循環節複製 1 次構成，每一循環節內有 6 個物品，則：

112233

122331

223311

233112

331122

311223

上述 6 種直線排列對應到同一種環狀排列，且每一種直線排列由一 6-循環節的循環排列複製 1 次構成。

定理四：

循環節內有 k 類物品,每類依序有 $x_1, x_2, ..., x_k$ 個，$(x_1, x_2, ..., x_k) = d$ ，d 有質因數 t $\Leftrightarrow$ 循環節內物品作直線排列產生的子循環節個數爲質數 t 之倍數。

證明

$(\Rightarrow)$ d 有質因數 $t \Rightarrow d$ 有正因數

$t \times u$ (其中 u 爲正整數)由定理二知 $t \times u$ 爲循環節內物品作直線排列可能產生的子循環節個數

$\Rightarrow$ 此子循環節個數爲質數 t 之倍數。

$(\Leftarrow)$ 循環節內物品作直線排列產生的子循環節個數爲質數 t 之倍數,不失一般性假設此(t 之倍數)等於 $t \times u$ (其中 u 爲正整數)，由定理二知

$(t \times u) \mid d \Rightarrow t \mid d$

$\Rightarrow d$ 有質因數 t ，得證。

例:

循環節 111111222222

1 有 6 個，2 也有 6 個 $\Rightarrow (6,6) = 6$

$\Rightarrow 6$ 有質因數 2,3

將循環節內物品做直線排列可能產生子循環節個數爲，

2 的倍數：

111222　　111222　　爲 2 個子循環節

12　12　12　12　12　12 爲 6 個子循環節

3 的倍數：

1122　1122　1122　爲 3 個子循環節

12　12　12　12　12　12 爲 6 個子循環節

引理 1：

循環節內物品作直線排列後產生子循環節個數爲某整數 k 之倍數所有情形所成集合爲 A_k ，若 $(i, j) = 1$ 則 $A_i \cap A_j = A_{i \times j}$ 。

證明

$\forall x \in A_i \cap A_j \Rightarrow x$ 內循環節內物品作直線排列後產生子循環節個數 t 爲 i 之倍數且爲 j 之倍數

$\Rightarrow [i, j]$ [註]$\mid t \Rightarrow \dfrac{i \times j}{(i, j)} \mid t \Rightarrow \dfrac{i \times j}{1} \mid t \Rightarrow i \times j \mid t$

$\Rightarrow x$ 內循環節內物品作直線排列後產生子循環節個數 t 爲 $i \times j$ 之倍數

$\Rightarrow x \in A_{i \times j} \Rightarrow (A_i \cap A_j) \subseteq A_{i \times j}$ ………(1)

$\forall x \in A_{i \times j} \Rightarrow x$ 內循環節內物品作直線排

列後產生子循環節個數 t 爲 $i\times j$ 之倍數 $\Rightarrow i\times j\,|\,t \Rightarrow i\,|\,t$ 且 $j\,|\,t \Rightarrow x$ 內循環節內物品作直線排列後產生子循環節個數 t 爲 i 之倍數且爲 j 之倍數

$\Rightarrow x\in A_i$ 且 $x\in A_j \Rightarrow x\in A_i\cap A_j$

$\Rightarrow A_{i\times j}\subseteq (A_i\cap A_j)\ldots.(2)$

由(1)(2)知 $A_i\cap A_j = A_{i\times j}$，得證。

【註】$[i,j]$ 表 i,j 之最小公倍數。

引理 2:

k 類物品 $a_1,a_2,\ldots,a_k$ 依序有 $x_1,x_2,\ldots,x_k$ 個，$(x_1,x_2,\ldots,x_k)=d$，d 有正因數 t，令 A_t 表示此 k 類物品作直線排列後產生循環節個數爲某整數 t 之倍數所有情形所成集合，則 $\left|A_t\right| = \dfrac{(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{t})!}{\prod_{i=1}^{k}(\frac{x_i}{t})!}$，其中 $t\,|\,x_i\,(i=1,2,3,\ldots,k)$

證明

k 類物品 $a_1,a_2,\ldots,a_k$ 依序有 $\frac{x_1}{t},\frac{x_2}{t},\ldots,\frac{x_k}{t}$ 個，令此 k 類物品排列之後複製 t 次之所有情形所成集合爲 B_t，$\forall x\in A_t \Rightarrow x$ 之循環節個數爲 t 之倍數

$\Rightarrow$ 令此循環節個數爲 $t\times p$

$\Rightarrow x$ 由 $\frac{x_1}{t\times p}$ 個 a_1，$\frac{x_2}{t\times p}$ 個 $a_2,\ldots$，$\frac{x_k}{t\times p}$ 個 a_k 複製 $t\times p$ 次構成

$\Rightarrow x$ 亦可視爲由

$\frac{x_1}{t}$ 個 a_1，$\frac{x_2}{t}$ 個 $a_2,\ldots$，$\frac{x_k}{t}$ 個 a_k 複製 t 次構成

$\Rightarrow x\in B_t \Rightarrow A_t\subseteq B_t\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$\forall x\in B_t \Rightarrow x$ 由 $\frac{x_1}{t}$ 個 a_1，$\frac{x_2}{t}$ 個 $a_2,\ldots,\frac{x_k}{t}$ 個 a_k 排列之後複製 t 次構成

$\Rightarrow$ 令 $(\frac{x_1}{t},\frac{x_2}{t},\ldots,\frac{x_k}{t})=d \Rightarrow$ 由定理二知

$\frac{x_1}{t}$ 個 a_1，$\frac{x_2}{t}$ 個 $a_2,\ldots$，$\frac{x_k}{t}$ 個 a_k 作直線排列可能產生的子循環節個數 $e\,|\,d \Rightarrow x$ 可視爲由

$\frac{x_1}{e\times t}$ 個 a_1，$\frac{x_2}{e\times t}$ 個 $a_2,\ldots$，$\frac{x_k}{e\times t}$ 個 a_k 這個子循環節複製 $e\times t$ 次構成

$\Rightarrow x$ 之循環節個數 $e\times t$ 爲 t 之倍數

$\Rightarrow x\in A_t \Rightarrow B_t\subseteq A_t\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

由(1)(2)知

$$A_t = B_t \Rightarrow \left|A_t\right| = \left|B_t\right| = \frac{(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{t})!}{\prod_{i=1}^{k}(\frac{x_i}{t})!},$$

得證。

定理五:

循環節內有 k 類物品，每類依序有 $x_1,x_2,\ldots,x_k$ 個，$(x_1,x_2,\ldots,x_k)=d$，若 d 之所有相異質因數由小而大爲 $d_1,d_2,\ldots,d_n$

，則循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之所有情形數爲

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{|Y|=j}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}$$ 。

【註】$Y\subseteq\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$，$|Y|=j$ ，

$0\le j\le n$， 定義 $\prod_{y\in\Phi}y=1$。

證明

循環節內 k 類物品之個數依序爲 $x_1,x_2,\ldots,x_k$ 且 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)=d$ ，若 d 有相異質因數由小而大爲 $d_1,d_2,\ldots,d_n$，由定理四知將循環節內 $(x_1+x_2+\ldots+x_k)$ 個物品作直線排列產生之子循環節個數必爲某 d_i 之倍數，$i=1,\ldots,n$，令循環節內物品作直線排列後產生子循環節個數爲某 d_i 之倍數所有情形所成集合爲 A_i，令循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之所有情形所成集合爲 T

$$\Rightarrow |T| = \frac{(x_1+\ldots+x_k)!}{(x_1)!\ldots\ldots(x_k)!}-\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|$$

$$=\frac{(x_1+\ldots+x_k)!}{(x_1)!\ldots\ldots(x_k)!}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\sum_{|Y|=j}\left|\bigcap_{y\in Y}A_y\right|$$

(由引理 1)

$$=\frac{(x_1+\ldots+x_k)!}{(x_1)!\ldots\ldots(x_k)!}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\sum_{|Y|=j}\left|A_{\prod_{y\in Y}y}\right|$$

(由引理 2)

$$=\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)!}{\prod_{i=1}^{k}x_i!}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\sum_{|Y|=j}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{|Y|=j}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}$$ ，得證。

例一 ：

循環節 aaaaaabbbbbbcccccc

a,b,c 各有 6 個

$\Rightarrow$(6,6,6) = 6 有質因數 2,3

$\Rightarrow$循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之所有情形數爲

$$\frac{18!}{6!\times6!\times6!}-\frac{(\frac{18}{2})!}{(\frac{6}{2})!(\frac{6}{2})!(\frac{6}{2})!}-\frac{(\frac{18}{3})!}{(\frac{6}{3})!(\frac{6}{3})!(\frac{6}{3})!}+\frac{(\frac{18}{2\times3})!}{(\frac{6}{2\times3})!(\frac{6}{2\times3})!(\frac{6}{2\times3})!}$$ 。

例二 ：

循環節 aaaaaaaabbbbbbbbcccccccc

a,b,c 各有 8 個

$\Rightarrow$ (8,8,8) = 8 有質因數 2

$\Rightarrow$循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之所有情形數爲

$$\frac{24!}{8!\times 8!\times 8!}-\frac{(\frac{24}{2})!}{(\frac{8}{2})!\,(\frac{8}{2})!\,(\frac{8}{2})!}$$ 。

例三 :

循環節

$$\underbrace{aa\ldots\ldots\ldots a}_{30個}\ \underbrace{bb\ldots\ldots\ldots b}_{30個}\ \underbrace{cc\ldots\ldots\ldots c}_{30個}$$

a,b,c 各有 30 個

$\Rightarrow (30,30,30)=30$ 有質因數 2,3,5

$\Rightarrow$循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之所有情形數爲

$$\frac{90!}{30!\times 30!\times 30!}-\frac{(\frac{90}{2})!}{(\frac{30}{2})!(\frac{30}{2})!(\frac{30}{2})!}$$

$$-\frac{(\frac{90}{3})!}{(\frac{30}{3})!(\frac{30}{3})!(\frac{30}{3})!}-\frac{(\frac{90}{5})!}{(\frac{30}{5})!(\frac{30}{5})!(\frac{30}{5})!}$$

$$+\frac{(\frac{90}{2\times 3})!}{(\frac{30}{2\times 3})!(\frac{30}{2\times 3})!(\frac{30}{2\times 3})!}$$

$$+\frac{(\frac{90}{3\times 5})!}{(\frac{30}{3\times 5})!(\frac{30}{3\times 5})!(\frac{30}{3\times 5})!}$$

$$+\frac{(\frac{90}{2\times 5})!}{(\frac{30}{2\times 5})!(\frac{30}{2\times 5})!(\frac{30}{2\times 5})!}$$

$$-\frac{(\frac{90}{2\times 3\times 5})!}{(\frac{30}{2\times 3\times 5})!(\frac{30}{2\times 3\times 5})!(\frac{30}{2\times 3\times 5})!}$$

定理六:

n 個物品排成一列後循環節個數由小而大依序爲 $w_1, w_2, \ldots, w_k$ ，若循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之情形所成集合依序爲 $S_1, S_2, \ldots, S_k$ ，則環狀排列數 $=\sum_{i=1}^{k}\frac{w_i\times|S_i|}{n}$ 。

證明

k 類物品共 n 個排成一列後有 w_i 個循環節 $(i=1,2,3,\ldots,k)$，若循環節內物品作直線排列後不產生子循環節之情形所成集合爲 S_i

$\Rightarrow$ S_i 中每種情形都有 w_i 個循環節

$\Rightarrow$每一循環節中有 $\frac{n}{w_i}$ 個物品

$\Rightarrow$由定理三知 S_i 中每 $\frac{n}{w_i}$ 種循環排列複製 w_i 次對應到同一種環狀排列

$\Rightarrow$ S_i 的環狀排列數

$=|S_i|\div\frac{n}{w_i}=\frac{|S_i|\times w_i}{n}$

$\Rightarrow$所有環狀排列數 $=\sum_{i=1}^{k}\frac{w_i\times|S_i|}{n}$ 。

例一:

求 4 白珠,5 黑珠,6 紅珠之環狀排列數?

解 :

白珠 4 個，黑珠 5 個，紅珠 6 個

$\Rightarrow$(4,5,6)=1，而 1 的正因數只有 1

$w_1=1, |S_1|=\dfrac{15!}{4!\times5!\times6!}$=630630，n=15

$\Rightarrow$ 環狀排列數 $=\dfrac{1\times630630}{15}=42042$

例二:

求 aaaabbbbcccccc 之環狀排列數?

解：

a,b 各有 4 個，c 有 6 個

$\Rightarrow$(4,4,6)=2，而 2 的正因數有 1,2

$w_1=1,$

$$|S_1|=\frac{14!}{4!\times4!\times6!}-\frac{(\frac{14}{2})!}{(\frac{4}{2})!(\frac{4}{2})!(\frac{6}{2})!}$$

$=210000$，$n=14$

$w_2=2,\ |S_2|=\dfrac{7!}{2!\times2!\times3!}=210$，$n=14$

$\Rightarrow$ 環狀排列數

$=\dfrac{1\times210000}{14}+\dfrac{2\times210}{14}=15030$。

例三：

求 aaaabbbbcccccccc 之環狀排列數?

解：

a 有 4 個， b 有 4 個，c 有 8 個

$\Rightarrow$(4,4,8) = 4 ，而 4 的正因數有 1,2,4

$w_1=1,$

$$|S_1|=\frac{16!}{4!\times4!\times8!}-\frac{(\frac{16}{2})!}{(\frac{4}{2})!(\frac{4}{2})!(\frac{8}{2})!}$$

$=900480$，$n=16$

$w_2=2,$

$$|S_2|=\frac{8!}{2!\times2!\times4!}-\frac{(\frac{8}{2})!}{(\frac{2}{2})!(\frac{2}{2})!(\frac{4}{2})!}$$

$=408$，$n=16$

$w_3=4,$

$|S_3|=\dfrac{4!}{1!\times1!\times2!}=12$，$n=16$

$\Rightarrow$環狀排列數

$=\dfrac{1\times900480}{16}+\dfrac{2\times408}{16}+\dfrac{4\times12}{16}=56334$ 。

例四：

求 aaaaaaaaaaaabbbbbbbbbbbb 之環狀排列數?

解：

a 有 12 個， b 有 12 個，

$\Rightarrow$(12,12) = 12 ，而 12 的正因數有 1,2,3,4,6,12

$$w_1=1,\left|S_1\right|=\frac{24!}{12!\times 12!}-\frac{(\frac{24}{2})!}{(\frac{12}{2})!(\frac{12}{2})!}-\frac{(\frac{24}{3})!}{(\frac{12}{3})!(\frac{12}{3})!}+\frac{(\frac{24}{2\times 3})!}{(\frac{12}{2\times 3})!(\frac{12}{2\times 3})!}=2703168\text{，}n=24$$

$$w_2=2,\left|S_2\right|=\frac{12!}{6!\times 6!}-\frac{(\frac{12}{2})!}{(\frac{6}{2})!(\frac{6}{2})!}-\frac{(\frac{12}{3})!}{(\frac{6}{3})!(\frac{6}{3})!}+\frac{(\frac{12}{2\times 3})!}{(\frac{6}{2\times 3})!(\frac{6}{2\times 3})!}=900\text{，}n=24$$

$$w_3=3,\left|S_3\right|=\frac{8!}{4!\times 4!}-\frac{(\frac{8}{2})!}{(\frac{4}{2})!(\frac{4}{2})!}=64\text{，}n=24$$

$$w_4=4,\left|S_4\right|=\frac{6!}{3!\times 3!}-\frac{(\frac{6}{3})!}{(\frac{3}{3})!(\frac{3}{3})!}=18\text{，}n=24$$

$$w_5=6,\left|S_5\right|=\frac{4!}{2!\times 2!}-\frac{(\frac{4}{2})!}{(\frac{2}{2})!(\frac{2}{2})!}=4\text{，}n=24 \qquad w_6=12,\left|S_6\right|=\frac{2!}{1!\times 1!}=2\text{，}n=24$$

$\Rightarrow$環狀排列

$$=\frac{1\times 2703168}{24}+\frac{2\times 900}{24}+\frac{3\times 64}{24}+\frac{4\times 18}{24}+\frac{6\times 4}{24}+\frac{12\times 2}{24}=112720\text{。}$$

例 五：

求 30 個 a ，30 個 b ，30 個 c 之環狀排列數?

解：

a 有 30 個， b 有 30 個，c 有 30 個

$\Rightarrow$(30,30,30) = 30，而 30 的正因數有 1,2,3,5,6,10,15,30

$$w_1=1，\left|S_1\right|=\frac{90!}{30!\times 30!\times 30!}-\frac{(\frac{90}{2})!}{(\frac{30}{2})!(\frac{30}{2})!(\frac{30}{2})!}-\frac{(\frac{90}{3})!}{(\frac{30}{3})!(\frac{30}{3})!(\frac{30}{3})!}-\frac{(\frac{90}{5})!}{(\frac{30}{5})!(\frac{30}{5})!(\frac{30}{5})!}$$

$$+\frac{(\frac{90}{2\times 3})!}{(\frac{30}{2\times 3})!(\frac{30}{2\times 3})!(\frac{30}{2\times 3})!}+\frac{(\frac{90}{3\times 5})!}{(\frac{30}{3\times 5})!(\frac{30}{3\times 5})!(\frac{30}{3\times 5})!}+\frac{(\frac{90}{2\times 5})!}{(\frac{30}{2\times 5})!(\frac{30}{2\times 5})!(\frac{30}{2\times 5})!}$$

$$-\frac{(\frac{90}{2\times 3\times 5})!}{(\frac{30}{2\times 3\times 5})!(\frac{30}{2\times 3\times 5})!(\frac{30}{2\times 3\times 5})!}，n=90$$

$$w_2=2，\left|S_2\right|=\frac{45!}{15!\times 15!\times 15!}-\frac{(\frac{45}{3})!}{(\frac{15}{3})!(\frac{15}{3})!(\frac{15}{3})!}-\frac{(\frac{45}{5})!}{(\frac{15}{5})!(\frac{15}{5})!(\frac{15}{5})!}+\frac{(\frac{45}{3\times 5})!}{(\frac{15}{3\times 5})!(\frac{15}{3\times 5})!(\frac{15}{3\times 5})!}，n=90$$

$$w_3=3，\left|S_3\right|=\frac{30!}{10!\times 10!\times 10!}-\frac{(\frac{30}{2})!}{(\frac{10}{2})!(\frac{10}{2})!(\frac{10}{2})!}-\frac{(\frac{30}{5})!}{(\frac{10}{5})!(\frac{10}{5})!(\frac{10}{5})!}+\frac{(\frac{30}{2\times 5})!}{(\frac{10}{2\times 5})!(\frac{10}{2\times 5})!(\frac{10}{2\times 5})!}，n=90$$

$$w_4=5，\left|S_4\right|=\frac{18!}{6!\times 6!\times 6!}-\frac{(\frac{18}{2})!}{(\frac{6}{2})!(\frac{6}{2})!(\frac{6}{2})!}-\frac{(\frac{18}{3})!}{(\frac{6}{3})!(\frac{6}{3})!(\frac{6}{3})!}+\frac{(\frac{18}{2\times 3})!}{(\frac{6}{2\times 3})!(\frac{6}{2\times 3})!(\frac{6}{2\times 3})!}，n=90$$

$$w_5=6，\left|S_5\right|=\frac{15!}{5!\times 5!\times 5!}-\frac{(\frac{15}{5})!}{(\frac{5}{5})!(\frac{5}{5})!(\frac{5}{5})!}，n=90 \qquad w_6=10，\left|S_6\right|=\frac{9!}{3!\times 3!\times 3!}-\frac{(\frac{9}{3})!}{(\frac{3}{3})!(\frac{3}{3})!(\frac{3}{3})!}，n=90$$

$$w_7=15，\left|S_7\right|=\frac{6!}{2!\times 2!\times 2!}-\frac{(\frac{6}{2})!}{(\frac{2}{2})!(\frac{2}{2})!(\frac{2}{2})!}，n=90 \qquad w_8=30，\left|S_8\right|=\frac{3!}{1!\times 1!\times 1!}，n=90$$

$$\Rightarrow \text{環狀排列數} = \sum_{i=1}^{8}\frac{w_i\times\left|S_i\right|}{90}\ 。$$

參考文獻

木易(1992):Discrete Mathematics Synthetic Analysis。北市：智勝。

王昌銳(1972)：組合論。高雄市：百成書局。

王奉民，陳定凱(1988)：離散數學導論。台北市：儒林書局。

李雲，林文達(1997)：離散數學。台北市：儒林書局。

張子浩(1988)：整合離散數學。台北市：文笙書局。

許振忠(1997)：一些排列組合的演算法。台北市：政大應數所碩士論文。

陳壽愷(1974)：論環狀排列與珠狀排列。台北市：科教圖書。

陳明哲(1959):排列組合。台中市：中央書局。

Kenneth H. Rosen (2003). Discrete Mathematics and its application (fifth edition). New York: McGraw -Hill.