中學生通訊解題第四十三期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
4301

圓周上有依序標上 1,2,3,...,n 的 n 個點,先選定一個點(假設為 k),標上紅色,然後依順時針方向,轉過 k 個空隙,將新點染上紅色,再依新點之號碼,依相同規則,到下一次點染紅.

(例: 1 ⟶ 2 ⟶ 4 ⟶....)

試就 n = 7,8,9,100 討論最多有幾個紅點?

參考解答：

1、就一般的 n 討論，假設由 n_0 開始，則依序為 $n_0, n_0\cdot 2, n_0\cdot 2^2, n_0\cdot 2^3, \cdots, n_0\cdot 2^k, \cdots$ 除以 n 的餘數(以符號 $k\equiv r(\bmod n)$ 表示 k 除以 n 餘數為 r 或可廣義的說 k, r 除以 n 餘數相同)

2、分 $n=7,8,9,100$ 討論

(1) $n=7$ 時

$2^3\equiv 1(\bmod 7)$，故不論從何開始，第四次必回到本身，所以至多 3 個，$1\to 2\to 4\to 1\to\cdots$.為 3 個的例子。

(2) $n=8$ 時

$2^3\equiv 0(\bmod 8)$，故不論從何開始，第四次後必停在 8，所以至多 4 個，$1\to 2\to 4\to 8\to\cdots$.為 4 個的例子。

(3) $n=9$ 時

方法一：

$2^6\equiv 1(\bmod 9)$，故不論從何開始，第七次必回到本身，所以至多 6 個，$1\to 2\to 4\to 8\to 7\to 5\to 1\to\cdots$.為 6 個的例子。

方法二：

若由 3 的倍數開始，則永遠都為 3 的倍數，故至多 3 個。若由非 3 的倍數開始，則永遠都為非 3 的倍數，故至多 6 個，$1\to 2\to 4\to 8\to 7\to 5\to 1\to\cdots$.為 6 個的例子。

(4) $n=100$ 時

方法一：

考慮 $1\to 2\to 4\to 8\to 16\to 32\to 64\to 28\to 56\to 12\to 24\to 48\to 96\to 92\to 84\to 68\to 36\to 72\to 44\to 88\to 76\to 52\to 4$

由上可知

$2^{22}\equiv 2^2(\bmod 100)$

$\Rightarrow k\cdot 2^{22}\equiv k\cdot 2^2(\bmod 100)$，故不論從何開始，第 23 次必回到第 3 次的點，所以至多 22 個，而上述的例子就是一個 22 個的例子。

方法二：

若由 5 的倍數開始，則永遠都為 5 的倍數，故至多 20 個。若由非 5 的倍數開始，則永遠都

爲非 5 的倍數，而且第三次後必爲 4 的數，故第三次後至多有 20 個點(四的倍數有 25 個，但扣掉其中有 5 的倍數 5 個)再加上第一次及第二次，至多可有 22 個點。方法一的例子就是一個 22 個的例子。

解題評註：

（1）找出所塗的點爲

$n_0, n_0\cdot 2, n_0\cdot 2^2, n_0\cdot 2^3, \cdots, n_0\cdot 2^k, \cdots$

除以 n 的餘數

（2）或用數論或用例子找出一般的循環性，並訂出上界

（3）給出例子

說明或證明上界是重要細節，若只給出例子不算完整；窮舉也是一種方式，不過若數字很大時，可能就不太容易作出。

問題編號
4302

設 n 是正整數，討論三元一次方程式 $3x+4y+5z = n$ 是否有正整數解？試回答下列問題：

(1)若有正整數解，n 的最小值爲何？

(2)若有正整數解，n 有何限制？

(3)若只有一組正整數解，n 有何限制？

參考解答：

(1)因方程式 $3x+4y+5z = n$ 僅能有正整數解，則當 $(x,y,z)=(1,1,1)$ 時，$n=12$ 是方程式有正整數解的最小值

(2)以 n 除以 3 的餘數來分類：

① $n=3k$（$k\in Z$），

$3x+4y+5z = 3k$

$\Rightarrow 3x = 3k-4y-5z$

$\Rightarrow\ x=k-y-2z+\left(\dfrac{-y+z}{3}\right)$

取 $y = z = 1$，得 $x = k-3$

$\therefore\ k\geq 4$ 方程式 $3x+4y+5z = n$ 均能有正整數解，因此 $n=12$，15，18，21，……. 方程式均能有正整數解。

② $n=3k+1$（$k\in Z$），

$3x+4y+5z = 3k+1$

$\Rightarrow 3x = 3k+1-4y-5z$

$\Rightarrow x=k-y-2z+\left(\dfrac{-y+z+1}{3}\right)$

取 $y = 2$，$z = 1$，得 $x = k-4$

$\therefore\ k\geq 5$ 方程式 $3x+4y+5z = n$ 均能有正整數解，因此 $n=16$，19，22，25，……. 方程式均能有正整數解

③ $n=3k-1$（$k\in Z$），

$3x+4y+5z = 3k-1$

$\Rightarrow 3x = 3k-1-4y-5z$

$\Rightarrow\ x=k-y-2z+\left(\dfrac{-y+z-1}{3}\right)$

取 $y = 1$，$z = 2$，得 $x = k-5$

$\therefore\ k\geq 6$ 方程式 $3x+4y+5z = n$ 均能有正整數解，因此

n=17，20，23，26，……. 方程式均能有正整數解。

綜合①②③可知，當 n=12 或 $n\geq15$ 的自然數時，方程式 $3x+4y+5z=n$ 均能有正整數解

(3)先給予一些必要條件：

①當 $x>3$ 時，若(x,y,z)是方程式的解，則$(x-3,y+1,z+1)$也是其解，故不只有一組正整數解，

②當 $y>2$ 時，若(x,y,z)是方程式的解，則$(x+1,y-2,z+1)$也是其解，故不只有一組正整數解，

③當 $z>2$ 時，若(x,y,z)是方程式的解，則$(x+2,y+1,z-2)$也是其解，故不只有一組正整數解，

④當 $y>1$ 且 $z>1$ 時，若(x,y,z)是方程式的解，則$(x+3,y-1,z-1)$也是其解，故不只有一組正整數解，

⑤當 $x>2$ 且 $y>1$ 時，若(x,y,z)是方程式的解，則$(x-2,y-1,z+2)$也是其解，故不只有一組正整數解，

⑥當 $x>1$ 且 $z>1$ 時，若(x,y,z)是方程式的解，則$(x-1,y+2,z-1)$也是其解，故不只有一組正整數解，

上述討論可知，若方程式只有一組正整數解時，則由①可知 $x\leq3$，由②可知 $y\leq2$，由③可知 $z\leq2$，由④可知當 $y=2$ 則必 $z=1$，當 $z=2$ 則必 $y=1$，再⑤⑥可知當 $x=3$ 則必 $y=1$， $z=1$

所以滿足以上條件的解(x,y,z)的可能有：

(i) $(1,1,1)\rightarrow n=12$，$(1,1,2)\rightarrow n=17$，$(1,2,1)\rightarrow n=16$，$(1,2,2)\rightarrow n=21$（與④不合），

(ii) $(2,1,1)\rightarrow n=15$，$(2,2,1)\rightarrow n=19$，$(2,1,2)$（與⑥不合），$(2,2,2)$（與④不合）

(iii) $(3,1,1)\rightarrow n=18$，

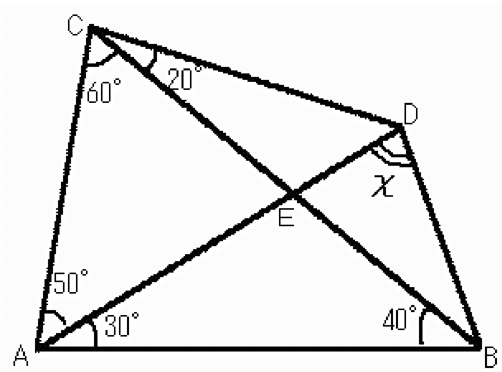
也就是說，當 n= 12，15，16，17，18，19，方程式可能只有一組正整數解。很容易檢查當 n 等於這 6 個值時，方程式只有一組正整數解

解題評註：

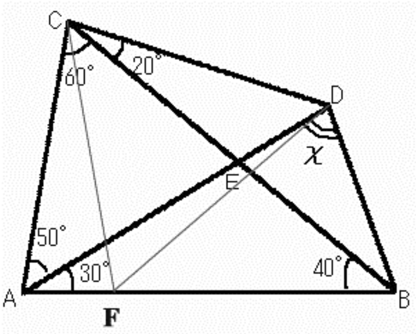
這題主要目的是要同學由觀察的過程當中，找出規律來。而在觀察部分，同學要善用一些計算上之技巧來處理，此處特別使用了餘數的概念；尤其在討論至唯一解時，要特別注意。

問題編號 4303

如圖，問 x 之角度為何？



參考解答：



(1) △ACD 爲等腰三角形

（∵ $\angle CDA = 50°$ ）$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{CD}$

(2) 在 AB 上取一點 F 使

$\angle CFA = 80° \Rightarrow$ △ACF 爲等腰三角形

$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{CF}$

(3) 由(1)、(2)得知 $\overline{CD} = \overline{CF}$ 、

$\angle ACF = 20°$ 、 $\angle FCB = 40°$

(4) $\angle FCD = \angle FCB + 20° = 40° + 20° = 60°$

(5) 由(3)、(4)得知△CDF 爲正三角形

$\Rightarrow \overline{CD} = \overline{CF} = \overline{DF}$

(6) $\angle FBC = 40° = \angle FCB \Rightarrow$ △FCB 是等腰三角形 $\Rightarrow \overline{FC} = \overline{FB}$

(7) 由(5)、(6)得知 $\overline{DF} = \overline{FB} \Rightarrow$ △FDB 是等腰三角形 $\Rightarrow \angle DBF = \angle BDF = 70°$

（因 $\angle DFB = 40°$ ）

(8)在△DAB 中，

$\angle x = 180° - \angle DAF - \angle DBF$：

$= 180° - 30° - 70° = 80°$

問題編號 4304

對每一個正整數 x 按下列的兩個程序得出數 z：

(1) 將 x 的最後一位數移到第一位得到 y；

(2) 將 y 開平方得到 z。

例如，$x = 9$，$y = 9$，$z = \sqrt{9} = 3$，又如，$x = 5002$，$y = 2500$，$z = \sqrt{2500} = 50$。

求所有的正整數 x，滿足 $z = \frac{1}{2}x$。

參考解答：

（1）設 $x < 10 \Rightarrow y = x \Rightarrow z = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 4$；

（2）設 $10 \leqq x < 100 \Rightarrow$ 可假設 $x = 10a + b$，$a, b \in Z$，且 $1 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$。

$\Rightarrow y = 10b + a \Rightarrow z = \sqrt{10b+a}$

$\Rightarrow \sqrt{10b+a} = \frac{1}{2}(10a + b)$

∵ $a, b \in N \Rightarrow \frac{1}{2}(10a + b)$爲有理數，

∴ $\sqrt{10b+a}$ 爲完全平方數，且 $\sqrt{10b+a} \leqq 9$,所以，$\frac{1}{2}(10a + b)$爲不大於 9 的正整數，故 $a = 1$，

$\Rightarrow \sqrt{10b+1} = 5 + \frac{1}{2}b$，

$\Rightarrow b = 8$，i.e. $x = 18$。

（3）設 $x \geqq 100$，則 $y < 10x$，

$\Rightarrow z = \sqrt{y} < \sqrt{10x}$

$= \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x}} \cdot x \leqq \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{100}} x = \frac{x}{\sqrt{10}} < \frac{1}{2}x$

∴ 當 $x \geqq 100$ 時,沒有合題意的解。

綜合(1)(2)(3)所有的 x 爲 4 或 18。

問題編號 4305

試求出最小的正整數 n，使得 n^3 的末三位數字是 168。

【參考解答一】

(1)因 n^3 的末位數字是 8，所以 n 的末位數字是 2。

(2)設 $n=10k+2$（$k\in Z$），$n^3=(10k+2)^3=1000k^3+600k^2+120k+8$，因 n^3 的十位數字是 6，所以 k 的個位數字為 3 或 8。

(3)原本應假設 $k=10t+3$ 或 $k=10t+8$，但為了簡化計算，我們可以假設 $k=5m+3$（$m\in Z$），$n^3=(10(5m+3)+2)^3=(50m+32)^3=125000m^3+240000m^2+153600m+32768$，因 n^3 的百位數字為 1，故 m 的個位數字為 4 或 9。當 $m=4\Rightarrow k=23\Rightarrow n=232$，當 $m=9\Rightarrow k=48\Rightarrow n=482$，當 $m=14\Rightarrow k=73\Rightarrow n=732$，當 $m=19\Rightarrow k=98\Rightarrow n=982$，……。所以 n 的最小值為 232

【參考解答二】

（由北市敦化國中時丕勳同學提供）

(1)因 n^3 是偶數，所以也 n 是偶數

(2)可以假設 $n=1000a+2b$（$a, b\in Z$），$n^3=(1000a+2b)^3=10^9a^3+6000000a^2b+12000ab^2+8b^3$，所以 $8b^3$ 的末三位數字是 168。因此假設 $8b^3=1000k+168$（$k\in Z$），故 $b^3=125k+21$。

(3)因 $b^3=125k+21\equiv 21 \pmod{125}$，經試驗得 $(-9)^3=-729\equiv 21 \pmod{125}$，故 $b=125k-9$。因此若取正整數值 $b=116, 241, 366, 491,$……。所以 n 的最小值為 232

（編者註）

解答二的第(3)部分，尋找 $b^3\equiv 21 \pmod{125}$ 的整數解，不但需要試驗的數字多，計算量也大，可以試試下面的討論方法：$b^3\equiv 21 \pmod{125}\Rightarrow b^3\equiv -4 \pmod{25}\Rightarrow b^3\equiv 1 \pmod{5}$，所以 $b\equiv 1 \pmod{5}$，假設 $b=5x+1$（$x\in Z$），代回 $b^3\equiv -4 \pmod{25}$，得 $15x+1\equiv -4 \pmod{25}$，所以 $15x+5$ 是 25 的倍數，即 $3x+1$ 是 5 的倍數，故 $x=3, 8, \ldots$。假設 $x=5y+3$（$y\in Z$），得 $b=25y+16$，代回 $b^3\equiv 21 \pmod{125}$，得 $19200y+4096\equiv 21 \pmod{125}$，即 $75y+96\equiv 21 \pmod{125}$，得 $75(y+1)\equiv 0 \pmod{125}$，所以 $75(y+1)$是 125 的倍數，即 $3(y+1)$是 5 的倍數，故 $y=4, 9, \ldots$。所以 b 的最小正整數值為 116，因此 n 的最小值為 232。

解題評註：

這題通訊解題，寄來的同學幾乎都得到了 232 這個答案，但大部分的解法都是由同餘觀念（不必用同餘記號），以參考解答一(1)(2)為基礎，再加上 $32^3=32768$，$82^3=551368$，$132^3=2299968$，$182^3=6028568$，$232^3=12487168$ 的驗證而得到。當然，實際的驗算並無錯誤，只是若遇到數字極大而又無計算器時，抽象符號的運用是必須學習的。參考解答二裡面，時丕勳同學從 168 是 8 的倍數而得到解法，其實只是 mod 的除數不同而已（解法一的除數是 10、100、1000），其中仍須處理 $b^3\equiv 21 \pmod{125}$ 的整數解，計算量並未減少，但若題目由 168 改成其他數目，除數也必須隨之調整，因此一般我們都會習慣以 10^k 當作除數。