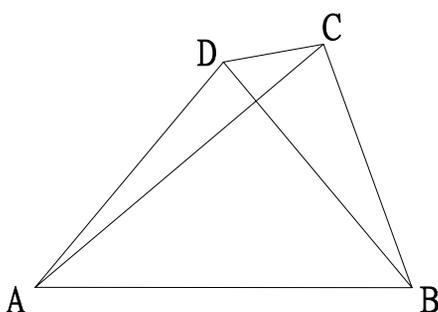


# 中學生通訊解題第四十二期題目參考解答及評註

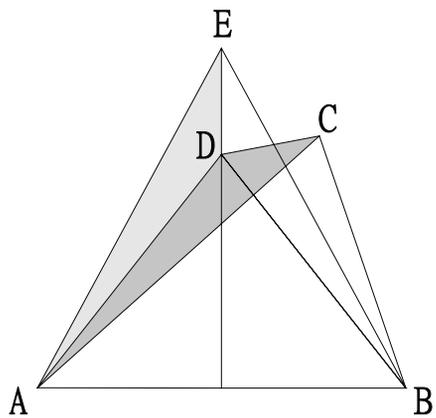
臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號  
4201

四邊形  $ABCD$  中， $\angle ABD = 50^\circ$ 、 $\angle DBC = 20^\circ$ 、 $\angle DAC = 10^\circ$ 、 $\angle CAB = 40^\circ$ ，試求  $\angle ACD = ?$



參考解答：



(如上圖)

(1)在  $\triangle ABD$  中：

$$\angle DAB = 10^\circ + 40^\circ = 50^\circ = \angle DBA$$

所以  $\triangle ABD$  是等腰三角形，即

$$\overline{DA} = \overline{DB}$$

(2)在  $\triangle ABC$  中：

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA$$

$$= 180^\circ - 40^\circ - (50^\circ + 20^\circ) = 70^\circ = \angle ABC$$

所以  $\triangle ABC$  是等腰三角形，即  $\overline{AC} = \overline{AB}$

(3)以  $\overline{AB}$  向  $D$  點同側作正三角形  $ABE$

(4)在  $\triangle ADE, \triangle ADC$  中：

$$\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{AB} = \overline{AC}$$

$$\angle DAE = \angle EAB - \angle DAC - \angle CAB$$

$$= 60^\circ - 10^\circ - 40^\circ = 10^\circ = \angle DAC$$

$$\text{又 } \overline{AD} = \overline{AD}$$

所以  $\triangle ADE \cong \triangle ADC$  (SAS 全等性質)

(5)  $\overline{EA} = \overline{EB}, \overline{DA} = \overline{DB}$ ，所以直線  $ED$  是  $\overline{AB}$

的中垂線，即  $\overline{ED}$  是  $\angle AEB$  的角平分線

$$\text{因此 } \angle ACD = \angle AED = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

解題評註：

從題意可找出關鍵在於線段  $AC$  與  $BD$  相互「垂直」。

- 1.以  $AC$  與  $BD$  當乘折線，藉「對稱」性質來作適當的輔助線，作法不唯一，有五位同學採用，其中計有四種不同的證明。
- 2.藉「三角函數」計算出角度。計有三種不同方法完成。

本題較易犯錯的想法將此四邊形  $ABCD$  誤認為「圓內接四邊形」。建議要進行檢驗，以避免產生不必要的錯誤。

問題編號  
4202

一個面積為 1003 的封閉區域 A，裡面放了 2005 個面積為 1 的小紙片，

試證：存在兩紙片，其重疊部分的面積不

小於  $\frac{1}{2005}$ 。



參考解答：

(1) 假設不存在兩個紙片重疊  $\frac{1}{2005}$  以

上。依序討論 2005 塊重疊情形。

(2) 第一塊與第二塊重疊不到  $\frac{1}{2005}$ ，故

覆蓋面積減少的量不多於  $\frac{1}{2005}$

(3) 第三塊再放進來時與前兩塊各重疊不到  $\frac{1}{2005}$ ，故覆蓋面積再減少的量不

多於  $\frac{2}{2005}$  (注意：若有三塊重疊的部

分，所減少的量會更少)

(4) ……

(5) 第 2005 塊再放進來時與前 2004 塊各

重疊不到  $\frac{1}{2005}$ ，故覆蓋面積再減少

的量不多於  $\frac{2004}{2005}$

(6) 所以總覆蓋面積超過

$$2005 - \left( \frac{1}{2005} + \frac{2}{2005} + \dots + \frac{2004}{2005} \right) = 1003$$

矛盾

故存在兩個紙片重疊面積不少於  $\frac{1}{2005}$ 。

解題重點：

(1) 假設結論不成立，推得矛盾，以得原結論成立 (反證法)

(2) 注意三塊以上重疊的部分之說明

問題編號  
4203

M	U
C	H

表(一)

H	A
N	D

表(二)

Y	E	S
T	H	X
G	O	D

表(甲)

W	E	L
O	V	E
Y	O	U

表(乙)

上列各表都是英文字母盤，每一次操作可以使某一行或某一列的字母同時改變，改變的規則是將每個英文字母都變成下一個

字母，即 A 變成 B，B 變成 C，…，最後的字母 Z 變成 A，試回答下列各題

- (1) 試問可否經過若干次操作，使得表(一)變成表(二)？  
 (2) 試問可否經過若干次操作，使得表(甲)變成表(乙)？

**參考解答：**

- (1) 可以  
 (2) 不可以

理由如下：

爲了方便，可將英文字母盤中的英文字母用 0,1,2,⋯,25 這 26 個數字代替(即 A 是 0, B 是 1, C 是 2, ⋯, Z 是 25)

設第  $i$  列操作了  $a_i$  次(橫條爲列)，

設第  $j$  行操作了  $b_j$  次(直條爲行)

則(1)即爲

M	U
C	H

表(一)

H	A
N	D

表(二)

12	20
2	7

表(一)

7	0
13	3

表(二)

可列成以下之方程組

$$\begin{cases} 12 + a_1 + b_1 = 26k_1 + 7 \\ 20 + a_1 + b_2 = 26k_2 \\ 2 + a_2 + b_1 = 26k_3 + 13 \\ 7 + a_2 + b_2 = 26k_4 + 3 \end{cases}$$

$$\text{取 } \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = 21 \\ b_1 = 16 \\ b_2 = 1 \end{cases} \text{ 即可滿足}$$

而(2)

Y	E	S
T	H	X
G	O	D

表(甲)

W	E	L
O	V	E
Y	O	U

表(乙)

即爲

24	4	18
19	7	23
6	14	3

表(甲)

22	4	11
14	21	4
24	14	20

表(乙)

考慮左上角的四個字母經轉換爲數陣

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ 設 } k = (a+d) - (b+c)$$

每次操作，數陣  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  變成

$$\begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c+1 & d+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c+1 & d \end{pmatrix} \text{ 或}$$

$$\begin{pmatrix} a & b+1 \\ c & d+1 \end{pmatrix}$$

不論何種情況， $k$  值皆不變。現在我們分別計算表(甲)和表(乙)的左上角的  $2 \times 2$  表的  $k$  值。

表(甲)的  $k$  值爲  $(24+7) - (4+19) = 8$  ；

表(乙)的  $k$  值爲  $(22+21) - (4+14) = 25$ ，

它們的  $k$  值不同，所以表(甲)不能變成表(乙)。

