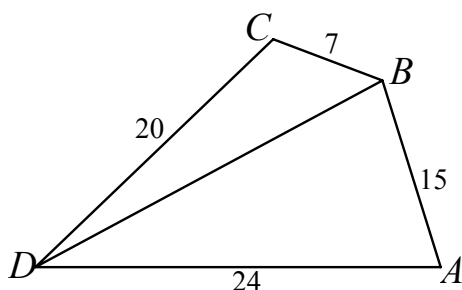


中學生通訊解題第四十一期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
4101

在四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=15$ ， $\overline{AD}=24$ ， $\overline{BC}=7$ ， $\overline{CD}=20$ ， $\angle ABD + \angle BDC = 90^\circ$ ，求四邊形 $ABCD$ 之面積？



參考解答：

作 A 關於 $\overline{BD}$ 之中垂線 L 之對稱點 A' ，連接 $\overline{A'B}$ 、 $\overline{A'C}$ 、 $\overline{A'D}$ ，則 $\overline{A'D}=15$ ， $\overline{A'B}=\overline{AD}=24$

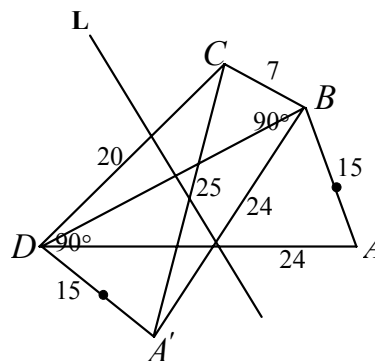
$$\begin{aligned}\because \angle A'DC &= \angle A'DB + \angle BDC \\ &= \angle ABD + \angle BDC = 90^\circ\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{A'C} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$$

$$\Rightarrow \angle A'BC = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ 四邊形 $ABCD$ 之面積 = 四邊形 $A'BCD$ 之面積

$$\begin{aligned}&= \Delta A'BC \text{ 之面積} + \Delta A'DC \text{ 之面積} \\ &= \frac{24 \times 7}{2} + \frac{15 \times 20}{2} = 234\end{aligned}$$



解題評註：

利用對稱法或旋轉法，構造一個與四邊形 $ABCD$ 等面積四邊形 $A'BCD$ ，即可得所求四邊形之面積。

問題編號
4102

有 20 個重量都是整數的砝碼，使得每一個整數的重量 $m (1 \leq m \leq 2005)$ 都可以透過將它放在天平的一個盤中，將部分的砝碼放在天平的另一個盤中而取得平衡。問這 20 個砝碼中最重的一個的最小值是多少？

參考解答：

不妨假設這 20 個砝碼的重量為

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{20},$$

$$\text{易知：} a_1 = 1, a_{k+1} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_k + 1$$

$$\Rightarrow a_2 \leq 2, a_3 \leq 4, a_4 \leq 8, a_5 \leq 16, a_6 \leq 32,$$

$$a_7 \leq 64, a_8 \leq 128.$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} \geq 2005$$

$$\begin{aligned} \therefore 12a_{20} &\geq a_9 + a_{10} + \cdots + a_{20} \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_8) \\ &= 2005 - (1 + 2 + \cdots + 128) \geq 1750 \\ &\Rightarrow a_{20} \geq 146. \end{aligned}$$

以下是一組實際的組合：

$$\begin{aligned} a_2 \leq 2, a_3 \leq 4, a_4 \leq 8, a_5 \leq 16, a_6 \leq 32, \\ a_7 \leq 64, a_8 \leq 128. a_9 = \cdots = a_{13} = 135, \\ a_{10} = \cdots a_{20} = 146, \text{ 爲一組合題意的砝碼。} \end{aligned}$$

解題評註：

本題的解題關鍵的想法是使最重的法碼的個數越多，則在有重量上限的條件之下，每一個最重的法碼都會變小。所以在開始時進行一些試驗，找出最重砝碼的最多可能個數，而由實驗的結果得到有 12 個，根據這個結果列出一個不等式。從而求出解答。其實本題比較常用二進位求解。這種題目只說出最種砝碼的最輕的可能值是不夠的，依題意應該給出一個實際可行的「方案」。

問題編號
4103

設 x, y 皆爲不大於 100 的自然數, 且 $B = \{(x, y) \mid 7 \mid x^2 + y^2\}$, 求 B 中所有元素的個數。

參考解答：

假設兩個數爲 $n = 7k + a$ 及 $m = 7l + b$, 其中 a, b 取 $0 \pm 1, \pm 2, \pm 3$ k, l 爲整數。
 $\Rightarrow m^2 + n^2 = 49(k^2 + l^2) + 14(ka + lb) + a^2 + b^2$

$\therefore 7 \mid m^2 + n^2 \Rightarrow 7 \mid a^2 + b^2$, 但 a^2, b^2 僅能取值 $0, 1, 4, 9$ 。驗算結果 $7 \mid a^2 + b^2$ 的唯一可能是 $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$, 即 $7 \mid m$ 且 $7 \mid n$

$\Rightarrow B$ 中元素的個數爲 $14^2 = 196$ 。

解題評註：

在批改的過程中，有些同學用一個詞：「易知」，我要奉勸這樣寫同學最好在往後改掉這個習慣，通常這樣的用語是公布解時，爲了節省篇幅而使用的。而你在競賽或通信解題徵答用了這個說法，會給評審有扣分的機會。這點請同學特別注意。此外，同學可曾注意道：如果我們將題中的 7 改成 5，會不會有 $5 \mid x^2 + y^2 \Leftrightarrow 5 \mid x^2$ 且 $5 \mid y^2$ 這樣的性質？如過沒有，那麼什麼樣的數才有這樣的性質呢？有興趣的同學不妨可以思考一下。

問題編號
4104

若 a, b, c 滿足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$,

試證：若 n 是自然數，

$$\frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}}.$$

參考解答：

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{a+b+c} \\ &\Rightarrow (ab+bc+ca)(a+b+c) = abc \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$\text{或 } b = -c \text{ 或 } c = -a$$

在不失去一般性的情況下,不妨設 $a = -b$,

$$\text{則 } a^{2n+1} = -b^{2n+1}$$

於是欲求證之左式

$$= \frac{1}{-b^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{c^{2n+1}}$$

而右式

$$= \frac{1}{-b^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}} = \frac{1}{c^{2n+1}}$$

,故等式成立。

問題編號
4105

來自 94 個國家的 2005 個勇士圍成一個圓圈坐著,每個國家都有唯一的勇士拿著一個金杯,地主國國王讓每個拿金盃的勇士同時都把金杯傳給右邊的勇士,一直重複下去,直到有國家所有的勇士手上都沒有金杯為止。

試問: 是否存在一種情況,永遠不會停止?

參考解答：

- (1) 假設存在情況永不停止
 - (2) 讓整個動作傳完一圈,故每個國家所拿的金杯人次為 2005
 - (3) 而傳完一圈,每個人都拿了 94 次
 - (4) 假設某國家有 n 人,則 $94n=2005$,但 94 不是 2005 的因數,不可能
- 故任何情況,都會在有限次就結束。

解題評註：

- (1) 假設結論不成立,推得矛盾,以得原結論成立(反證法)
- (2) 算兩次(用不同的角度,對同一個量計算兩次)