行星諧和定律的形成與影響

姚 珩

國立臺灣師範大學 物理系

摘　要

克卜勒在尋找行星角速率在比例上之音律關係時，形成了行星軌道半徑與公轉週期間的諧和定律，並計算出各個行星的離心率。他的工作將天文學、物理學與數學，做了緊密的結合，開創了物理學新的研究方法，也奠定了物理學論證的基本形式。

關鍵詞：天文學、行星諧和定律、克卜勒、科學史、科學哲學。

一、前言

一般學生在學習克卜勒 (J. Kepler，1571-1630) 第三定律—或稱行星諧和定律時，大都是由教科書所提供的行星軌道半徑、及公轉週期的觀察資料開始著手，然後去檢視軌道半徑立方與週期平方之比值，的確可得出為一個常數，如表 1 所示。藉此而知，上述稱為諧和定律的內涵確實為真 (國立台灣師範大學科學教育中心，1995)。

表 1：行星軌道的觀察資料

行星	軌道半徑 R (10^6公里)	公轉週期 T (天)	R^3/T^2 (10^{19}公里^3/天^2)
水星	57.9	88	2.509
金星	108.2	224	2.509
地球	149.6	365	2.509
火星	227.9	687	2.508
木星	778.3	4333	2.509
土星	1427.0	10760	2.510

如果諧和定律被發現的實情真是如此，學生將很難體會克卜勒的貢獻到底在哪? 因為由表 1，一般人均可看出，行星軌道半徑增大時，對應的週期也會隨著變大。若彼此不是成一次方比，也不是成平方比，很自然地便會去測試是否會成 3/2 次方比? 這麼淺顯數學關係的提出，怎麼就能使克卜勒成為一位傑出的科學家?

另一方面，克卜勒早在 1604 年左右，就已同時發現了非常艱深的行星橢圓定律與面積定律 (Kepler，1609; 姚珩和黃秋瑞，2003; 姚珩，2004)，為何還需花費十年之久的時間，才於 1619 年提出現在看似簡單的第三定律 (Kepler，1619)? 諧和定律背後代表的到底是什麼意義?

回溯當哥白尼 (N. Copernicus，1473-1543) 於 1543 年提出日心說時，他首先規定了 6 顆行星的相關位置，並獲得各行星環繞太陽的公轉週期，但他從未也無法自觀察資料中，推知這些行星與太陽之間正確的實際距離 (哥白尼，1543)。到了克卜勒時期，即使累積了第谷 (Tycho Brahe，1546-1601) 大量的精確資料，他仍然僅能知相鄰二行星間之距離比。在沒有表 1 各個行星軌道半徑的詳細資料下，

克卜勒卻能尋找出宇宙裡行星間某些特殊的規律，這種在兩個變數之間建立起數學關係的構想，是那時代的人全然不曾有過的想法 (Bell，1945)。不僅如此，他還能更進一步清晰地算出，每個行星的離心率──即行星的橢圓軌道與正圓軌道到底有多大的偏差程度，這則不是任何人僅觀察表 1 就可獲得的結果。在這十二年中，克卜勒所建立的全新概念與所使用的運算方法，都是科學發展史上的創舉。

二、年輕時的宇宙觀

克卜勒在 25 歲時所完成的第一部著作—「宇宙奧秘」(Kepler，1596) 中，爲了要解釋宇宙裡爲何恰有 6 顆行星，並想推導出與觀測值符合的行星之間的距離比例，而提出了他獨創的幾何模型：以太陽爲圓心，自一小球形開始，外切一正多面體 (每邊每角均同)，然後外接第二球體，再外切另一正多面體，逐漸擴充。每個行星按照排列順序，由小而大分別落在對應的球體上，如表 2 所示 (*Koyre′*，1992，p147)。

在表 2 中可看出，由幾何模型所算出的球體相對半徑比，與哥白尼的行星軌道比值，相當吻合。克卜勒非常高興地說："我從這個發現中得到的高度愉快是無法用言詞表達的，我不再懊悔時間浪費，也不厭倦工作，我不避開計算的勞苦，...我日日夜夜都消磨於推演計算之中。" (Kepler，1596)

24 年後，在累積了第谷精確的資料，及發現橢圓與面積定律後，克卜勒知道上述幾何模型有所偏差，他回顧著說："如今，這二十年來天文觀測已非常精準，但正多面體間的距離比與觀測不符，而各行星離心值的非平分特性，其理由為何，亦未顯示。顯然：在宇宙的結構中，我一直尋找的只是石塊，或適合於這些石塊的典雅形式而已。卻不知至大的設計者，是以靈性物體之清晰形象來構造宇宙。故漸漸地，尤其在過去三年中，我來到了諧和關係 (*I came to Harmonies*)，並且放棄了正多面體之方案。諧和關係不是由手安置，亦非呈現行星個數及彼此之間隔，它提供了正多面體所不能給予的離心率。好比它給了一幅雕像，鼻、眼及各部細微成分，但正多面體模型，只粗略描述其外觀容量而已。為了要讓身體得到生命必需之器官，或讓雕像獲得生命形象，...他們必須能產生出必要的和諧，如此方能更傾近天體運動之美。" (*Koyre′*，1992，p342)

雖然克卜勒的正多面體模型並未成功，但他已是當時整個歐洲大陸，對哥白尼學說及天文學內容，了解最熟悉與認識最深刻的年輕學者。且他一心想理解行星間距離的比例，並尋找出某種諧和關係的理想，最後被證明出是一種極爲正確的遠見。

表 2：克卜勒在「宇宙奧秘」一書中的幾何模型

		模型半徑比	哥白尼觀測到二行星間距離比
球	水星	707	
正八面體 (Octahedron)		:	7.23
球	金星	1000　795	
正二十面體 (Icosahedron)		:	7.94
球	地球	1000　795	
正十二面體 (Dodecahedron)		:	7.57
球	火星	1000　333	
正三角錐體 (Tetrahedron)		:	3.33
球	木星	1000　577	
正立方體 (Cube)		:	6.35
球	土星	1000	

三 、角速率與諧和定律

一如畢達哥拉斯 (Pythagoras，585 - 497 B. C.) 認爲，要描述自然的真實性，欲掌握物體的本質，便是要能透視它們背後，所呈現的精髓──數 (卡西勒，1994)。好比七弦琴上奏出低音與高音 Do，在他們的弦上必會有 2：1 之弦長關係，克卜勒認爲在天際之中，必定也會存在著某種特定的和諧關係。在觀察土星於遠日點與近日點處，一天內，分別移動了 $1'46''$ 及 $2'15''$，故在「世界的和諧」(Kepler，1619) 第 3 章命題 11，敘述著：“土星的遠日點與近日點之運動比值為 *4：5*，是大調三度音程。”

克卜勒在此所言之運動 (motion)，亦即現代所說的角速率，代表行星每日運轉前進的角度。他是首位對此角度給予一術語，並將此術語形成概念，來進行討論的科學家。命題 15，則言 (如表 3)：“火星－地球、地球－金星與金星－水星之近日－遠日點處之運動比值分別為諧和率 *2:3*(五度音程)、*5：8*（小調六度音程）及 *3：5*（大調六度音程）。”

公理 4 亦言：“行星有不同的離心率，與不同的運動值，因此它們與太陽必會有不同的距離。” (Stephenson，1994，p188)

克卜勒開始尋找行星之間，所有可能的特性。在「世界之和諧」第 3 章第 8 節裡提到了其歷程與結果：“……在使用了第谷的觀測及長時間的努力，而決定出各行星軌道區間的距離後，終於，我得到了各行星週期之間的真實關係。假如你問我是什麼時候發現它的，我會說是在 1618 年的 3 月 8 日，但當時並沒有計算成功，我認為錯誤而放棄了它。然而，在 5 月 15 日時，這個全新的想法又回到我的腦海中，有如排山倒海似地，克服掃除了我心靈中的陰霾，並且與 17 年來花費在第谷觀測上的計算及我目前的研究，如此和諧地相互呼應著。起初我以為是在作夢，或只是預設它為一個可接受的原理 *(principle)*，但最終它卻是不容置疑地真實且正確的：任意兩個行星的週期，與他們的平均軌道半徑有 3/2 的比率關係 *(the periodic times of any* *two planet are in the sesquialteral ratio to their mean distances of the orbits.*）"（Kepler，1937，VI，p302; *Koyre′*，1992，p338）

克卜勒並沒有把他的推導過程紀錄下來。*Koyre′* 認爲克卜勒不可能是以試誤法 (trial and error) 得知此關係，應較可能是分別從，對同一行星而言：由距離規則所述(Kepler，1609; 姚珩和黃秋瑞，2003)，劃過固定弧長所需時間，與至太陽距離成正比，即 $T \propto R$; 與對不同行星而言：假定爲等速率圓周運動，則 $v \propto 2\pi R/T$，又由距離規則 $v \propto 1/R$，故 $2\pi R/T \propto 1/R$ 或 $T \propto R^2$，得到一些線索。既然，此兩種比率關係皆是錯誤的（與觀測數據比較），或許可以嘗試中間值 3/2 這個比率，即 $T \propto R^{3/2}$ 或 $T^2 \propto R^3$，對所有行星來說，應會等於唯一相同值（*Koyre′*，1992）。

但對克卜勒而言，行星軌道爲橢圓而非正圓，那麼他所謂橢圓軌道的平均半徑是什麼意思? 另外，如何自相鄰二行星間之軌道距離之相對比值，獲得所有行星軌道合理精確的絕對比值? 都是克卜勒所要面對的問題。若是眼前的觀察數據，都還未被整理出正確的數值時，要能判斷出半徑與週期之間嚴格的數學規律，是極不可能的。

表 3：各行星的日(diurnal) 運動 (或角速率) 之間的諧和比率

		日運動	兩行星間之諧和音律	同一行星間之諧和音律
土星	遠日點：	1′46″ a.		a：b＝4：5 (大調三度音程)
	近日點：	2′15″ b.	a：d＝1：3，b：c＝1：2	
木星	遠日點：	4′30″ c.		c：d＝5：6 (小調三度音程)
	近日點：	5′30″ d.	c：f＝1：8，d：e＝5：24	
火星	遠日點：	26′14″ e.		e：f＝2：3 (五度音程)
	近日點：	38′1″ f.	e：f＝5：12，f：g＝2：3	
地球	遠日點：	57′3″ g.		g：h＝15：16 (半音程)
	近日點：	61′18″ h	g：k＝3：5，h：i＝5：8	
金星	遠日點：	94′50″ i.		i：k＝24：25 (雙箭音程)
	近日點：	97′37″ k.	i：m＝1：4，k：l＝3：5	
水星	遠日點：	164′0″ l.		l：m＝5：12 (八度加小三度音程)
	近日點：	384′0″ m.		

(1：3＝十二度音程 1：2＝八度音程 1：8＝三倍八度音程 1：4＝高八度音程
3：5＝大調六度音程 5：24＝高八度加小三度音程 5：8＝小調六度音程)

(Martens，2000，p125)

四 、諧和定律與離心率

當諧和定律的雛形建立起來後，克卜勒便著手推展此理論關係，並交給實驗觀測值，來檢驗其論證的真實性。

克卜勒並非直接從哥白尼所知各行星的公轉週期出發，而是從他所喜愛的諧和運動比值開始。最後，他可同時得到行星的公轉週期、行星與太陽的距離比、及各行星之離心率大小，而完成了對觀測值的驗證工作。表 4 中第 1、2 行均是克卜勒由第谷之觀測值整理而得，分別表示不同行星或相同行星，在遠日點及近日點處運動 (或角速率) 之相對比值，其中許多關係還清楚地被列為書中的公理。為要同時滿足此二行之觀測結果，克卜勒利用質數因子的分解方法，而自相鄰行星間之角速率的相對比值，尋找出了各個行星角速率精確的絕對比值。

譬如，土星遠日點及土星近日點之運動比值為 64：81，土星近日點及木星遠日點之運動比值為 1：2，木星遠日點及木星近日點之運動比值為 6561：8000，則此四者共同之運動比值可表示為 $2^6\times3^7$：3^{11}：2×3^{11}：$2^7\times3^3\times5^3$ ＝ 64：81：162：198，如第 3、4 行所示。這為他後續的分析，奠定下成功的第一步。

對各行星之平均運動值，克卜勒並非是取二極值之平均值，如土星之平均角速率不為 (139,968 ＋ 177,147)/ 2 ＝ 158,558。他是取原先 64：81 之算術平均 72.5 與幾何平均 72，二值相差之一半 0.25，再自幾何平均減去它，而得 71.75。這是由冗長之測試運算後，所得到的一個非顯而易見之經驗結果，並記載成第 3 章命題 12 (Stephenson，1994，p188) ：

表 4：各行星在遠近日點處之運動 (或角速率) 比值 (觀測值)

1 不同行星之運動比值				2 相同行星之運動比值	3 共同運動比值	4 質數因子
1			土星遠日點	64	139,968＝	$2^6\times3^7$
	1		土星近日點	81	177,147＝	3^{11}
	2		木星遠日點	6,561	354,294＝	2×3^{11}
	5		木星近日點	8,000	432,000＝	$2^7\times3^3\times5^3$
	24		火星遠日點	25	2,073,600＝	$2^{10}\times3^4\times5^2$
	2		火星近日點	36	2,985,984＝	$2^{12}\times3^6$
32	3		地球遠日點	2,916	4,478,976＝	$2^{11}\times3^7$
		5	地球近日點	3,125	4,800,000＝	$2^9\times3\times5^5$
	5		金星遠日點	243	7,464,960＝	$2^{11}\times3^6\times5$
	3	8	金星近日點	250	7,680,000＝	$2^{12}\times3\times5^4$
1	5		水星遠日點	5	12,800,000＝	$2^{12}\times5^5$
4			水星近日點	12	30,720,000＝	$2^{12}\times3\times5^4$

(Martens，2000，p133)

“行星之平均運動，要小於它二極值運動之幾何平均；其小於之量，恰為二極值運動的算數平均，與幾何平均差值之一半。”

故最後將 71.75 乘上放大值 139,968/64 ＝ 177,147/81 ＝ 2187 得到 156,917。同理，亦可求得其他行星每日所運轉前進的角度，並列在表 5 第 1 行。

由於各行星平均運動比值的倒數，即爲對應行星的週期比 (因角速率＝ 2π/週期，或 $\omega = 2\pi / T$)。若以地球之週期爲標準參考，並設定爲 1,000,000，則土星之週期爲取 156,917 之倒數，再乘上共同因子 (4,635,322×1,000,000) 而得 29,539,960。克卜勒接著便開始引用諧和定律，取土星週期之三次方根 (309.1)，平方後再除以 10 (以地球週期之 3/2 次方＝1,000 爲標準參考)，則得 9,556，列於第 4 行。定此數爲由諧和定律推得之行星與太陽平均距離之理論值。

接著在第 3 章第 6 節裡克卜勒說：“對同一外接圓，遠日點與近日點處之同一時間內，所經過之弧角與此二點至太陽距離之倒數平方成正比例。”

此爲面積定律之延伸，因以現在之符號表示，即面積 $A = rs/2 = r^2\theta/2$，故 $dA/dt = r^2\omega / 2 =$ 常數，得到 $\omega \propto 1/r^2$ 或 $r \propto 1/\omega^{1/2}$。因此，距離比即爲角速率平方根之倒數比，並列在表 6 第 2 行。若土星之離心率 5，是以平均距離 85 爲參考，則當平均距離爲 9,556 時，離心率成爲 562。故求得之遠日點與近日點距離之理論值，則爲 9,556±562 或 10,118 與 8,994。

若與第谷觀測到之遠日點及近日點至太陽的距離值比較，可看出對所有行星而言，其理論值與觀測值幾乎完全符合。這不僅是確認了如表 5 第 2、4 行所示，行星週期與行星至太陽平均距離之 3/2 次方比之關係爲正確的，更重要的是，由此諧和定律進一步推得各行星之離心率，並與觀測值全部一致。在諧和定律中，此重要與不易之貢獻常被一般人所忽略。

表 5：自行星軌道平均運動比值轉換至行星至太陽平均距離比值 (理論值)

	1 平均運動 比值	2 週期比值	3 哥白尼之觀測 週期比值	4 行星至太陽 平均距離比值
土星	156,917	29,539,960	10759	9,556
木星	390,263	11,877,400	4333	5,206
火星	2,467,322	1,878,483	687	1,523
地球	4,635,322	1,000,000	365	1,000
金星	7,571,328	612,229	225	721
水星	18,864,680	245,714	88	392

(Martens，2000，p135)

表 6：離心率、遠日點距離與近日點距離

	1 角速率比	2 距離比	3 平均距離	4 離心率 (偏心距)	5 標準化後 之離心率	6 遠日點 距離	7 近日點 距離
土星	64 81	90 80	85	5	562	10,118 【10,052】	8,994 【8,968】
木星	6,561 8,000	89,444 81,000	85,222	4,222	258	5,464 【5,451】	4,948 【4,949】
火星	25 36	60 50	55	5	138	1,661 【1,665】	1,384 【1,382】
地球	2,916 3,125	96,825 93,531	95,178	1,647	17	1,017 【1,018】	983 【 982】
金星	243 250	10,000 9,859	99,295	705	5	726 【729】	716 【719】
水星	5 12	98,000 63,250	80,625	17,375	85	476 【470】	308 【307】

(Martens，2000，p132，p136; Stephenson，1994，p224。第 6、7 行括號內之值爲觀測值。)

簡單而言，克卜勒諧和定律的形成，是以底下步驟來進行的：

遠近日點處角速率ω $\Rightarrow$ 平均角速率$\omega \Rightarrow$ 週期 T $\Rightarrow$ 軌道半徑 $R \Rightarrow$ 離心率

在完成他最後的行星定律工作後，克卜勒以祈禱文結束了他的著作：“感激造物主，您先引領我去欣賞您的工作，再讓我在您的成品中歡暢。看！如今我已完成我曾誓言許諾的事，運用了您賦予我的所有能力，將您創造的榮耀向眾人揭示，...若我將您創作中之崇高優美，帶入了輕率之域，尚祈您的憐憫、同情與原諒。”

五、諧和定律的影響

克卜勒形成表 5 與表 6 的方式，在他之前並未有人如此做。因表中每一直行代表變動的數值，此種變動數值可以一概念、或變數來代表的方法，稱爲代數。而科學家會使用變數的文字符號，來加以運算的方法，是僅在 1590 年法國數學家 Vieta (1540-1603) 之後才開始 (Bell，1945，p120)。克卜勒首先利用了此方法在天文學的分析上，使得天文學不再只是純粹使用幾何學方法來處理。換句話說，在他之前沒有人知道要以列表方式，來輔助自己從事科學思考，克卜勒是第一位如此做的科學家。以後的伽利略 (G.. Galilei，1564-1642) 也充分使用此種新數學方法，來討論落體運動。他們倆人幾乎同時利用此代數方法，在不同的領域上，而一起開啓了物理學的新頁。

在諧和定律完成，並被觀察證實爲真的過程中，同時也可說明在推導時所使用的概念，如：角速率、平均角速率、行星至太陽的平均軌道半徑等，以及所建立的原理，如：角速率與週期的倒數關係 $\omega = 2\pi / T$、距離與角速率平方根成反比 r

$\propto 1/\omega^{1/2}$ 等，均爲正確。克卜勒也首先大量採用和建立，一種將物理性質使用數值或量來呈現的方式，這就是今天所言「物理量」的意義。

「世界之和諧」一書是第一部以命題、定理的書寫形式，來論證天文學的內涵，它深深影響著後來牛頓 (I. Newton，1642-1727) 巨著「自然哲學的數學原理」的風格。從本文對諧和定律原貌扼要的介紹，我們可看出克卜勒的論證方法，已與現代物理學的思考方式非常接近，或者可說，現代物理學的思考方式是由克卜勒定出了基調。一如科學史家所言："克卜勒是第一個冒險對天文學的問題，進行嚴密數學處理的人;是在新科學那特有的意義上，第一個確立起自然律的人。……他的描述與研究方法，與晚近科學成功的方法，有許多共同之處。"（伯特, 1994, p57）

六、結論

對事實背後的真實原因—數量與幾何—之熱愛和信心，讓哥白尼揭開了科學革命的序幕，克卜勒深深體會此革命性意義，終其一生都在擁護與推展此數學的簡潔性及和諧美。

在諧和定律中，週期、軌道半徑與偏心率之數值關係，揭示及印證了宇宙中所含有之音律與和諧性。此定律呈現了哥白尼所揭櫫的科學革命精神 ： 宇宙運動之原因，即是要以背後所呈現的數學簡單性，與數學和諧性，來重新加以解釋。此種將天文學、物理學與數學結合的思考方法，由哥白尼、克卜勒及伽利略開啓，而經牛頓集其大成，共同完成了古典物理學的奠基大業。

參考文獻

國立台灣師範大學科學教育中心(1995)：高級中學物理。台北市：國立編譯館。

姚珩、黃秋瑞 (2003)：克卜勒行星橢圓定律的初始內涵，科學教育月刊，第256期，第33-45頁。

姚珩 (2004)：行星面積定律的建立，科學教育月刊，第274期，第32-38頁。

哥白尼 (Copernicus, N. [1543] 2001)：天體運行論。武漢市：陝西人民出版社。

卡西勒 (Cassirer, E. 1994)：人論－人類文化哲學導引。台北市：桂冠圖書公司。

伯特 (Burtt, E. 1994)：近代物理科學的形而上學基礎。成都市：四川教育出版社。

Bell, E. T. (1945). *The development of mathematics*. New York: McGraw-Hill.

Kepler, J. ([1596] 1981). *The secret of the universe.* New York: Abaris Books

Kepler, J. ([1609] 1992). *New astronomy.* New York: Cambridge University Press.

Kepler, J. ([1619] 1997). *The harmony of the world.* Philadelphia, PN: American Philosophical Society.

Kepler, J. (1937). *Johannes Kepler Gesammelte Werke.* Munich: Beck.

Koyre′, A. (1992). *The astronomical revolution Copernicus-Kepler-Borelli*. NewYork: Dover Publications, Inc.

Martens, R. (2000). *Kepler's philosophy and the new astronomy*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Stephenson, B. (1994). *The music of the heavens: Kepler's harmonic astronomy.* Princeton, NJ: Princeton University Press.