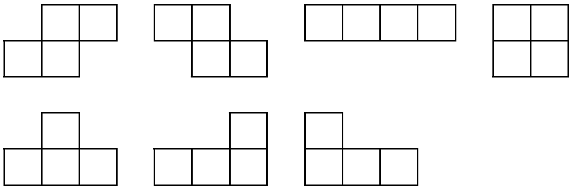
中學生通訊解題第三十九期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
3901

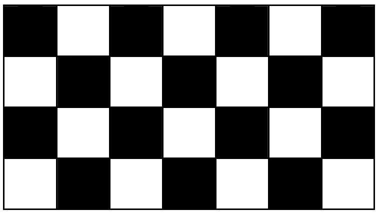
用四個邊長為 1 的正方形組成的「四連方」有如圖的七種：



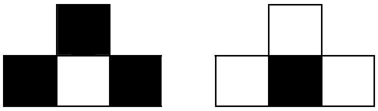
用這些四連方拼成一塊 7 × 4 的矩形最多可以用這七種連方中的幾種？

參考解答：

(1) 將 7×4 的矩形塗成黑白相間如圖：

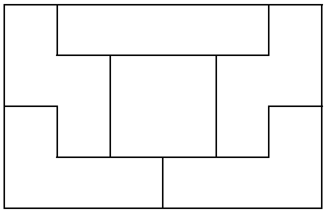


其中黑格與白格各有 14 個，再將七種「四連方」也塗成黑白相間，除了下者為 3 黑 1 白或 1 黑 3 白以外，其餘必定為 1 黑 1 白。



若要放入七種「四連方」，則必為 15 黑 13 白或 13 黑 15 白，但 7×4 的矩形為 14 黑 14 白，故不可能。

(2) 又下列例子說明可以放入六種「四連方」拼成一塊 7 × 4 的矩形，故最多可以用六種「四連方」拼成一塊 7 × 4 的矩形。



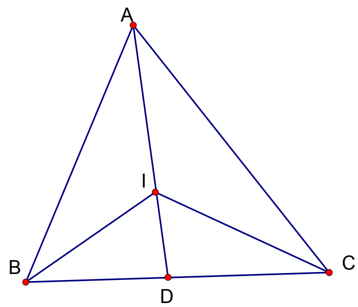
解題評註：

本題除了要證明不可能放入七種「四連方」拼成一塊 7 × 4 的矩形以外，還要再舉出一個例子說明可以放入六種「四連方」拼成一塊 7 × 4 的矩形，如此才算完整。

問題編號
3902

如右圖：AD 是∠A 的平分線，I 在 AD 上，且 $\angle BIC = 90^{\circ} + \frac{1}{2}\angle BAC$。

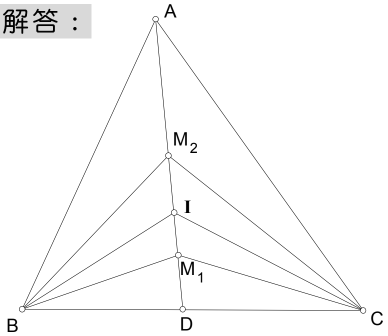
求證：I 是△ ABC 的內心。



解題評註：

幾何證明的逆定理常用的方法是反證法，利用另一個假設成立然後證明其矛盾，或者證明其重合，此題發覺大部分的學生用此法來證明。但也有利用做輔助線直接來證明，這也是非常漂亮的證法，我們將此兩種漂亮的證法皆提供給大家參考。

參考解答：



方法一：

如下圖，設 M 為ΔABC 的內心，因未知 M 在 I 的上方或下方，分別將 M 於上方及下方設 M_2 與 M_1 分開來討論：

當 M 在 I 的上方

$\angle BM_2C=\angle BAC+\angle ABM_2+\angle ACM_2<\angle BAC+\angle ABI+\angle ACI=\angle BIC=90^0+\frac{1}{2}\angle BAC$

∵ M_2 為ΔABC 的內心，

故 $\angle BM_2C=90^0+\frac{1}{2}\angle BAC$（矛盾）

同理當 M 在 I 的下方

$\angle BM_1C=\angle BAC+\angle ABM_1+\angle ACM_1>\angle BAC+\angle ABI+\angle ACI=\angle BIC=90^0+\frac{1}{2}\angle BAC$

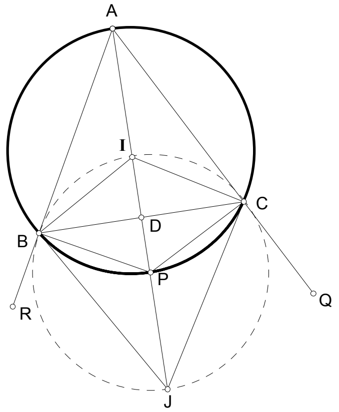
∵ M_1 為ΔABC 的內心，

故 $\angle BM_1C=90^0+\frac{1}{2}\angle BAC$（矛盾）

所以 I 為ΔABC 的內心

（北市師大附中王思貽同學、北市士林國中姜駿宇同學提供）

方法二：



1. 作∠B，∠C 外角的平分線交於 J，J 為ΔABC 的傍心，

   $\angle BJC=90^0-\frac{1}{2}\angle BAC$

2. 作ΔABC 的外接圓交 AD 直線於 P 點，連接 BP，CP

   ∵ $\angle BAP=\angle CAP$，∴ $\overline{IB}$

3. $\angle BIC+\angle BJC=90^0+\frac{1}{2}\angle BAC+90^0-\frac{1}{2}\angle BAC=180^0$

   ∴ B、I、C、J 四點共圓，作此圓

4. $\angle BCJ=\angle PCJ+\angle BCP=\angle PCJ+\frac{1}{2}\angle BAC$，

   $\angle JCQ=\angle PJC+\frac{1}{2}\angle BAC$

   ∵ $\angle BCJ=\angle JCQ$　∴ $\angle PCJ=\angle PJC$

   ∴ $\overline{PC}=\overline{PJ}$

$\therefore\ \overline{PC}=\overline{PJ}=\overline{BP}$

P 是 B、I、C、J 四點共圓的圓心

∠ICJ=∠ICB+∠DCJ=90^0

5. ∠ICJ=∠ICB+∠BCJ=90^0 ，又

∵∠ACI+∠JCQ=90^0 ∠BCJ=∠JCQ ，

∴ ∠ICB=∠ACI

∴ $\overline{IC}$ 是 ∠C 的內角平分線

6. 同理可證 $\overline{IB}$ 是 ∠B 的內角平分線，∴ I 是ΔABC 的內心

（北縣中和國小夏誌陽同學提供）

問題編號
3903

以 90 個單位立方體與一個邊長為 a，一個邊長為 c 的立方體，構成一個邊長為 c 的立方體,其中 a,b,c 都是正整數,試求出 a,b,c。

參考解答：

根據題意：可以列式子 $c^3=a^3+b^3+90$。

易知，$c>a+b$，所以，$90=c^3-a^3-b^3\geqq 3ab(a+b)\Rightarrow ab(a+b)\leqq 30$ 不妨假設 $a\leqq b\Rightarrow$ a 的可能值為:1.2.3.5.6.10,15,30。

但是，5 及 5 以上的值明顯地不可能。經驗算易得 a＝2，b＝3，c＝5 或 a＝1，b＝5，c＝6，加上 a,b 的對稱情形共四種。

解題評註：

本題解題的關鍵和大多的數論問題相同，就是設法找出滿足這個等式中未知數的範圍。同學們大致也能抓住這個重點，當中的差別僅僅在於敘述的繁簡不同。基本上同學的寫法都相當的不錯，這點是相當值得嘉許的。

被扣分的最主要的原因是沒有考慮到 $\mathbf{a^3+b^3<c^3}$ 的情形。

問題編號
3904

斯諾克是一種撞球遊戲,遊戲的簡要規則如下：

1. 正常情況：一次最多只有一球進袋，沒有違規情事發生(以下規則皆在正常情況下)
2. 遊戲的開始,在球台上規定的位置擺上 15 顆紅球與 6 顆色球(分別是黃，綠，棕，藍，橙，及黑色球各一顆)；並在規定的區域擺一顆白球(也稱母球)
3. 遊戲由兩人進行
4. 每人每次出桿撞擊白球，使白球撞擊紅球或色球進袋(稱將紅球或色球打進袋)，可連續出桿至無球進袋時，換對手出桿
5. 在球台上有紅球時，每打一顆(任一)色球前皆需先打進一顆紅球；紅球進袋不需拿出來；而色球進袋需要拿出來再放至在球台上規定的位置，直至球台上最後一顆紅球
6. 打進最後一顆紅球後，仍可選擇任一顆色球將其打進；並隨即將該色球拿出來放至在球台上規定的位置；此後需按照黃，綠，棕，藍，橙，黑的順序將色球打進，此時打進的色球不需拿出來
7. 每打進一顆紅球可得 1 分，打進黃球一次可得 2 分，打進綠球一次可得 3 分，打進棕球一次可得 4 分，打進藍球一次可得 5 分，打進橙球一次可得 6 分，打進黑球一次可得 7 分

8. 一人的最高分為 147 分(一顆紅球，一顆黑球，一顆紅球，一顆黑球⋯直到最後一顆紅球打進，再打進黑球共有 120 分再依序打完所有色球共有 27 分，加起來共 147 分)

在某一場正常情況的斯諾克中，楊聰發現他的得分還不能確定是否贏得這場遊戲,接著他打進了一顆球，又看了一下球台剩餘的球；發現此時他已經確定贏得這場遊戲(不論對手之後再怎麼得分，分數都無法超越楊聰)，這時楊聰的計分板上註記著 X 分。

試問 X 的最大值與最小值是多少？

參考解答：

若要得最大值，雙方皆要衝高分，雙方最大總得分為 147 分，當對手打進八次(紅球加黑球)；楊聰打進七次(紅球加黑球)再打進一顆黃球，對手再打進一顆綠球；楊聰再依序打進棕球、藍球、橙球，此時對手得分 67 分；而楊聰得分 73 分，球台只剩一顆色球(黑球)，尚不能確定是否贏得這場遊戲，接著楊聰將黑球打進，得 80 分，此時他已經確定贏得這場遊戲，故 **X 的最大值是 80 分**。

若要得最小值，雙方皆要低分，雙方最小總得分為 42 分(雙方打進紅球後，皆無打進色球，15 分再加上依序須打進的色球 27 分共 42 分)，當雙方打進紅球後，皆無打進色球，如此交替出桿將紅球打完，對手共進了二顆紅球，楊聰進了十三顆紅球。接著楊聰打進黃球，綠球共得 18 分，尚不能確定是否贏得這場遊戲，接著楊聰將棕球打進，得 22 分，此時他已經確定贏得這場遊戲，故 **X 的最小值是 22 分**。

解題評註：

有同學的答案寫：楊聰一開始一連打進紅球加黑球九次共 72 分，再打進一顆紅球共 73 分，尚不能確定是否贏得這場遊戲。其實此時球台剩下五顆紅球以及色球，對手最多只能得 67 分，以此種情況而言，楊聰已經贏了。所以這樣寫是不對的。

本題需要去分析最高分及最低分的情況，並將這些情況組合出來，希望同學們下次好好加油！

問題編號 3905

大於 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$ 的最小整數為何？

參考解答：

先觀察

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6=(\sqrt{3})^6+6(\sqrt{3})^5(\sqrt{2})+15(\sqrt{3})^4(\sqrt{2})^2+20(\sqrt{3})^3(\sqrt{2})^3$$
$$+15(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^4+20(\sqrt{3})(\sqrt{2})^5+(\sqrt{2})^6$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6=(\sqrt{3})^6-6(\sqrt{3})^5(\sqrt{2})+15(\sqrt{3})^4(\sqrt{2})^2-20(\sqrt{3})^3(\sqrt{2})^3$$
$$+15(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^4-20(\sqrt{3})(\sqrt{2})^5+(\sqrt{2})^6$$

將二式相加

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6=2(\sqrt{3})^6+30(\sqrt{3})^4(\sqrt{2})^2+30(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^4+2(\sqrt{2})^6$$

$$=54+540+360+16=970$$

又 $0<(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6<1,\quad \therefore 969<(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6<970$

所求=970

解題評註：

這題主要目的是要由觀察的過程當中，找出規律來，並求出其和(或是用乘法公式硬展，也可得到結果)。