中學生通訊解題第四十期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
4001

現有21個車站，n家客運公司，若每家客運公司都在5個車站兩兩之間經營客運路線，且每個車站之間都至少有一直達路線，則客運公司至少需要幾家？並請把你的規劃情形列出來。

參考解答：

(1)至少需要 $\dfrac{C_2^{21}}{C_2^5}=\dfrac{210}{10}=21$ 家客運公司

(2)可以找出一組規劃情形如下：

21家客運公司	每家客運公司所經營的5個車站				
1	1	2	3	4	5
2	1	6	7	8	9
3	1	10	11	12	13
4	1	14	15	16	17
5	1	18	19	20	21
6	2	6	10	14	18
7	2	7	11	15	19
8	2	8	12	16	20
9	2	9	13	17	21
10	3	6	11	16	21
11	3	7	10	17	20
12	3	8	13	14	19
13	3	9	12	15	18
14	4	6	12	17	19
15	4	7	13	16	18
16	4	8	10	15	21
17	4	9	11	14	20
18	5	6	13	15	20
19	5	7	12	14	21
20	5	8	11	17	18
21	5	9	10	16	19

解題評註：

這題主要目的是要由觀察的過程當中，找出規律來，並求出最小值。而所求的21這個數值，只是可能的情形之一，所以還要找出一組解，其確實滿足條件。

問題編號
4002

正三角形 ABC 內部的點 M 滿足：$\angle MAB+\angle MBC+\angle MCA=\theta$，試求所有$M$的位置，使得 $\theta=90^\circ$。

參考解答：

作正ΔABC之三高 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$，

<1>若 M 在三高 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 上

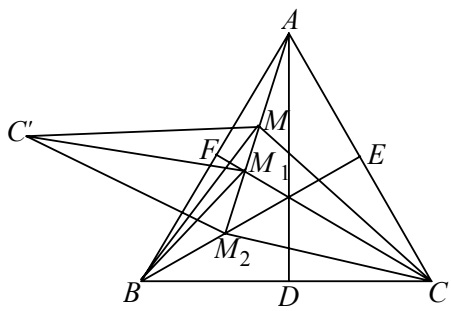
$\Rightarrow$ $\because \Delta AMB\cong\Delta AMC\,(SAS)$

$\therefore \angle 3=\angle 4\Rightarrow \angle MAB+\angle MBC+\angle MCA=$

$\angle MAB+\angle MBC+\angle MBA=90^0$

<2>若 M 不在三高 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 上

$\Rightarrow$ 利用反證法：



如上圖所示：$\overline{AM}$ 交 $\overline{CF}$、$\overline{BE}$ 於點 M_1、M_2，連接 $\overline{CM}$、$\overline{CM_2}$、$\overline{BM}$、$\overline{BM_1}$，

作 C 關於 $\overleftrightarrow{AM}$ 之對稱點 C'，連接 $\overline{C'M}$、$\overline{C'M_1}$、$\overline{C'M_2}$

設 $\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = 90^0$……(1)

但 M_1 在高 $\overline{CF}$ 上，M_2 在高 $\overline{BE}$ 上，由<1>知

$\angle M_1AB + \angle M_1BC + \angle M_1CA = 90^0$……(2)

$\angle M_2AB + \angle M_2BC + \angle M_2CA = 90^0$……(3)

(1)−(2) $\Rightarrow \angle MBM_1 = \angle MCM_1$

(1)−(3) $\Rightarrow \angle MBM_2 = \angle MCM_2$

由軸對稱性質知：

$\angle MC'M_1 = \angle MCM_1 = \angle MBM_1$

$\therefore C'$、B、M_1、M 四點共圓；

又 $\angle MC'M_2 = \angle MCM_2 = \angle MBM_2$

$\therefore C'$、B、M_2、M 四點共圓

$\therefore C'$、B、M_1、M_2、M 五點共圓

$\Rightarrow M_1$、M_2、M 三點共圓

$\Rightarrow M_1$、M_2、M 三點不可能共線，此與圖中 M_1、M_2、M 共線矛盾

$\therefore$(1)不可能成立，即假設錯誤

$\therefore$所有 M 都在三高 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 上。

解題評註：

將 M 之位置分成 2 種情況處理。先証<1>M 在三高 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 上，

再利用反證法證明<2>M 不在三高 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 上即可。

問題編號 4003

試計算 $\left(\frac{11}{5}\right)^{2005}\sqrt{\frac{5^{4010}+35^{4010}}{11^{4010}+77^{4010}}}$ 之值。

參考解答：

原式

$$=\left(\frac{11}{5}\right)^{2005}\sqrt{\frac{5^{4010}(1+7^{4010})}{11^{4010}(1+7^{4010})}}$$

$$=\left(\frac{11}{5}\right)^{2005}\left(\frac{5}{11}\right)^{2005}\sqrt{\frac{1+7^{4010}}{1+7^{4010}}}$$

$= 1$

解題評註：

本題是因應現行國中教材須加強的「指數律」與「根號運算」而出題。

問題編號 4004

平面座標系中，兩軸的座標都是整數的點稱為格子點。請設計一種方法，將所有的格子點染色，每個點都染成紅色、綠色、黑色這三色中的一種顏色，且滿足下列兩個條件：

(1) 每種顏色的點都出現在無窮多條水平線上；

(2) 對任意紅點 A、綠點 B、以及黑點 C，必可找到一個綠點 D 使得四邊 $ABCD$ 是一個平行四邊形。

參考解答：

方法一：

(1) 在 Y 軸上依序填上紅、黑、紅、黑、紅、黑、紅、黑、……

(2) 其餘的點都填上綠

則易驗其滿足所有條件

註：不一定要是選擇 Y 軸，例如選直線 $x=y$ 也可。

方法二

(1) 兩座標都為偶數者填上紅色

(2) 兩座標都為奇數者填上黑色

(3) 其餘的點都填上綠色

則

1. 任相異三色的三點都不共線

證：令紅黑綠三點

$(2r_1,2r_2),(2b_1+1,2b_2+1),(2g_1,2g_2+1)$

若三點共線　則

$$\frac{(2r_1)-(2g_1)}{(2r_2)-(2g_2+1)}=\frac{(2b_1+1)-(2g_1)}{(2b_2+1)-(2g_2+1)}$$

$$\Rightarrow 2(r_1-g_1)\cdot 2(b_2-g_2)=[2(r_2-g_2)-1]\cdot[2(b_1-g_1)+1]$$

偶數等於奇數矛盾

(綠點為 $(2g_1+1,2g_2)$ 同理)

2. 令紅黑綠三點

$(2r_1,2r_2),(2b_1+1,2b_2+1),(2g_1,2g_2+1)$

則平行四邊形的第四個點為

$(\,2(r_1+b_1-g_1)+1\,,\,2(r_2+b_2-g_2)\,)$ 為綠點(綠點為 $(2g_1+1,2g_2)$ 同理)

方法三：

(1) y 座標為偶數時，都填上綠色

(2) y 座標為奇數，x 座標為偶數時，填上紅色

(3) y 座標為奇數，x 座標為奇數時，填上黑紅色

則其滿足所有條件，說明如方法二

解題評註：

解題重點：(1)任紅黑綠三點不共線

(2)奇偶性

問題編號 4005

設 S＝

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2004^2}+\frac{1}{2005^2}}$$

求不大於 S 的最大整數[S]。

參考解答：

對所有的自然數 k

$$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\sqrt{\frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{(k+1)^2k^2}}=\sqrt{\frac{k^4+2k^3+3k^2+2n+1}{(k+1)^2k^2}}=\sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{(k+1)^2k^2}}$$

$$=\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$\Rightarrow$

$$S=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+1+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}=1+1-\frac{1}{2005}=2004+\frac{2004}{2005}$$

$\Rightarrow [S]=2004$

解題評註：

這個題目的解題關鍵是能由前面幾項中觀察出一般項的通性，對於國中的同學我們不要求嚴格的證明。但是，認真一點地來看待如何作答這個問題時，則寫出一般項的證明是必要的。上面的寫法就是一個蠻好的參考。