給迴歸直線另一個證明

楊健民

臺北市立第一女子高級中學

在統計上，以最小平方法求迴歸直線時，我們常用的方法有配方法與偏微分，配方法非常的麻煩，而偏微分高中生又還沒學到，因此在此篇論文中，我將用高中生所學習過的柯西不等式來尋找迴歸直線。

一、預備知識

1.標準差：設一組抽樣資料 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，則其標準差(或稱樣本標準差)簡寫成 S，定義為

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\overline{x}^2}{n-1}}$$ 。

2.相關係數：對兩組具相異性質 X 與 Y 的資料數據

X	x_1	x_2	…	x_n
Y	y_1	y_2	…	y_n

當 x_1，x_2，…，x_n 不盡相同，而且 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 也不盡相同時，X 與 Y 之間的相關係數為

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{(n-1)\cdot S_x\cdot S_y}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^{\,2}-n\overline{y}^2}}$$ ，

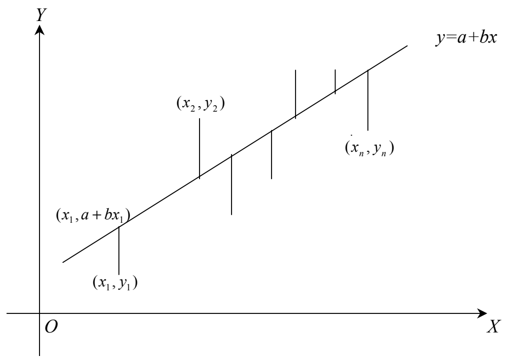
其中 $\overline{x}$ 為 x 的平均數，$\overline{y}$ 為 y 的平均數，S_x 為 x 的標準差，S_y 為 y 的標準差。

3.最小平方法：對所給定的有限多個數對 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，要求出一個線型函數 $g(x)=a+bx$，使得誤差(殘差)的平方和

$$\begin{aligned}E&=(g(x_1)-y_1)^2+(g(x_2)-y_2)^2+\cdots\\&\quad+(g(x_n)-y_n)^2\\&=(a+bx_1-y_1)^2+(a+bx_2-y_2)^2+\cdots\\&\quad+(a+bx_n-y_n)^2\end{aligned}$$

為最小。

4.最適合直線（迴歸直線）：就幾何意義來說，我們把 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 看成是坐標平面上的點，然後找出一條直線 $y=a+bx$，使得 n 段鉛垂線段的長度平方和為最小。在經濟學與統計學中，這條直線通常稱為迴歸直線；此處，我們稱之為最適合直線。



5.柯西不等式：

設 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $2n$ 個實數，則

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
$$\le(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2),$$

亦即 $(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\le(\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i{}^2)$

當等號成立時，若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全為零，則必有一實數 λ 存在，使得 $b_1=\lambda a_1,b_2=\lambda a_2,\cdots,b_n=\lambda a_n$

二、研究動機

嘗試以不同的方法來探討迴歸直線之求法。

三、研究過程

證明：(1)Y 對 X 的最適合直線為

$$y-\overline{y}=r\cdot\frac{S_y}{S_x}(x-\overline{x})。$$

(其中 r 為 x,y 之相關係數)

(2)迴歸線之方程式為：

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}y_i & n \\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_iy_i & \sum_{i=1}^{n}x_i \end{vmatrix}=0$$

＜證明＞

（1）對於任意給定的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，$n\ge3$，我們可以找到 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得

$\sum_{i=1}^{n}k_ix_i=0$ 且 $\sum_{i=1}^{n}k_i=0$

由柯西不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i-y_i)^2\sum_{i=1}^{n}k_i{}^2$$
$$\ge[\sum_{i=1}^{n}k_i(a+bx_i-y_i)]^2$$
$$=[\sum_{i=1}^{n}(k_ia+bk_ix_i-k_iy_i)]^2$$
$$=(a\sum_{i=1}^{n}k_i+b\sum_{i=1}^{n}k_ix_i-\sum_{i=1}^{n}k_iy_i)^2$$
$$=(\sum_{i=1}^{n}k_iy_i)^2$$

當 $\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i-y_i)^2$ 有最小值時，

$$a+bx_i-y_i=\lambda k_i,\forall i=1,2,\cdots,n,\lambda\ne0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i-y_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda k_i=\lambda\sum_{i=1}^{n}k_i=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(a+bx_i-y_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda k_ix_i$$
$$=\lambda\sum_{i=1}^{n}k_ix_i=0$$

因此 $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(a+bx_i-y_i)=0 \\ \sum_{i=1}^{n}(ax_i+bx_i^2-x_iy_i)=0 \end{cases}$ ---(*)

$$\Rightarrow \begin{cases} na+bn\overline{x}-n\overline{y}=0\text{---(甲)} \\ na\overline{x}+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0\text{---(乙)} \end{cases}$$

由(甲) $a=\overline{y}-b\overline{x}$ 代入(乙)得

$$n(\overline{y}-b\overline{x})\overline{x}+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0$$

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2)b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}$$

$$\therefore b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=r\cdot\frac{S_y}{S_x}$$

$$y=a+bx$$

$$\Rightarrow y=(\overline{y}-b\overline{x})+bx$$

$$\Rightarrow y=\overline{y}+b(x-\overline{x})$$

$$\Rightarrow y=\overline{y}+r\cdot\frac{S_y}{S_x}(x-\overline{x})$$

$$\Rightarrow y-\overline{y}=r\cdot\frac{S_y}{S_x}(x-\overline{x})$$

(2)由(*)

$$\begin{cases} a+bx-y=0 \\ na+b\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i=0 \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0 \end{cases}$$

令 $A=a,B=b,C=-1$

因此齊次方程組

$$\begin{cases} A+xB+Cy=0 \\ nA+(\sum_{i=1}^{n}x_i)B+(\sum_{i=1}^{n}y_i)C=0 \\ (\sum_{i=1}^{n}x_i)A+(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)B+(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)C=0 \end{cases}$$

有非零解

$(A,B,C)=(a,b,-1)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ n & \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}y_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_iy_i \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}y_i & n \\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_iy_i & \sum_{i=1}^{n}x_i \end{vmatrix}=0$$

四、結語

數學研究的最高理想是希望將複雜的事物簡單化，但在由複雜變成簡單的過程中，需要多少的預備知識與新知識的形成，因此若能用已學習過的現有知識去嘗試不同的證明，即使不能變得更完美，也是一大樂事，在此提供此一證明供大家參考；最後，感謝陳昭地教授的不吝指正。