數學與音樂的對話—探討音樂中的數學應用

翁瑞霖

私立輔英科技大學 應用化學系

摘　要

代表理性的數學，其規律、和諧與秩序所產生的美感，雖無聲音之傳遞，但與音樂是根本相連的；而代表感性的音樂，其音強、音高、音色、節奏、旋律、曲式及風格，雖無明顯之數字表達，但數學的蹤影處處可見。本文藉由數學與音樂的多元對話，探討音樂領域中數學的應用範例；黃金比例在樂曲結構之應用；運用數學推演和計算畢氏音階、純律音階和十二平均律音階的組成；探討五度相生律的應用範例與數學的密切關係；歸納和分析音程和音調的數學二元圖表，在在都顯示出數學與音樂密不可分的關係。期望藉由數學與音樂的多元對話，探討音樂中的數學關係，以提供促進科技與人文藝術之融合的另一種思考的模式。

關鍵字：音樂、數學、科技、人文

壹、緒論

整個天體就是一種和諧，而宇宙的和諧，則是按一定數字比例規則排列所建立的秩序。這種唯美的宇宙觀，雖然沒有揭示出原本的物質真諦，卻對其後之科學美學和音樂美學的發展，產生了極深遠的影響(童忠良，1993)。

音樂可以平衡人類的身體和靈魂，也能串聯起世界各部分。音樂之所以能有這樣的力量，是因為音樂建立在優美的數字比例系統上，而這種比例正是生於西元前五百多年的希臘著名哲學家、數學家兼音樂家畢達哥拉斯(Pythagoras)所發現。他是第一位以科學方法探討音樂，也是人類文化史上最早將音樂與數學結合起來思考的人，曾先後到美索不達米亞與埃及的廟宇從事研究，並將七個音階的觀念引進希臘(童忠良，1993；黃嘉彥，2000)。希臘人對於音樂中最優美的聲音所下的定義是：神聖不可侵犯的數學關係、上帝的指紋。這些聲音透過一些簡單而固定的比例，結合兩個或是更多相異的音符，形成令人喜悅的和諧；而和諧、優美的聲音，就是一種特別的數字表現。在音樂的神奇比例中，發現上帝透漏了建築教堂的平面圖；文藝復興時代的哲學家們在其中找尋從天堂獲得生命的秘密；作曲家們渴望從古代音樂的贈禮中，獲得馴服野獸、引誘天上靈魂，甚至是引誘樹木從地底冒出地面的能力(Isacoff，2002)。

而恰當的音樂比例更反應了人類內在本質的波動，好似反射了天體和諧地在

各自的軌道上旋轉，例如喀卜勒(Kepler)即認為音樂的和諧是幾何學所造就的官能，更 從音樂長久為人所尊敬的神奇比例中，發現控制天上行星運行的規則，從太陽的位置觀察，土星在近日點時，是以每天 135 秒速度移動一個弧度距離，在遠日點則只需 106 秒，此二數字之比例約為 5：4，恰等於產生大三度音程的兩根弦的振動比例；而木星會產生一個小三度音程；火星則是完全五度音程。以此方式測試，每個星球似乎都會產生一個音樂上的比例數字。此外，牛頓 (Newton)亦發現音符頻率的比例，與陽光通過一個三稜鏡所形成的顏色配置比例相吻合；他同時進行各種音階的數學分析，將同樣的八度音程劃分成 20、24、25、29、36、41、51、53、100、120、612 個不同等份，以精確的數字比較所有得到的音階，進而標示音符間的音距標準單位。而伽利略(Galilei)則藉由特殊設計的鐘擺，以特定的速度上升、下降，恰與八度音程(2：1)、五度音程(3：2)、三度音程(5：4)相符合；透過這場機械式的芭蕾舞蹈，讓他的眼睛首次可以看到「耳朵也聽得到的遊戲」(Isacoff，2002)。

數學和音樂都是由抽象的觀念中，創造連貫一致的模式，由離散分立的資料中創造統合的整體，乃是人性基本的組織活動，其模式使我們深信宇宙中必有某種次序(Storr，1999)。數學源自於人們對自然界規則事物的觀察，是一種研究自然規律的科學，而音樂則是對於聲音中規則變化的認識，二者都是在認識自然，對自然界的事物作描述或探求(曾志華，2000)。因此音樂家可以感覺到數學，而數學家可以想像到音樂。音樂就像是形象的數學，是一種隱藏的算術練習，透過潛意識的心靈跟數目字在打交道，雖然我們不能像數學那樣推演音樂，可是我們可以用聽覺感知它的嚴謹；而數學則是推理中的音樂，雖然我們不能用聽覺感知它的節奏，可是我們可以用大腦體會它的韻律。雖說音樂是夢幻而數學是現實，但當人類智慧昇華到完美的境界時，數學和音樂就互相滲透而融為一體了，兩者的靈魂是完全一致的(歐陽絳，1996；蔡聰明，1994)。

長久以來，數學在科技領域的拓展過程中，一直扮演著舉足輕重的角色，而隨著社會的多元發展，數學的應用範圍更是廣泛。其中，在音樂領域所運用的數學演算範例，更是不勝枚舉；而數學與音樂之間的對話及其關聯性的探討，也成為古今中外學者研究的重要議題之一。例如：古希臘的畢達哥拉斯發現弦長的簡單整數比，進而推演出畢氏音階(黃嘉彥，2000)。德國的維爾克邁斯達(Werckmeister)發表十二平均律、古中國朱載堉提出十二平均律計算法(曾志華，2000)。法國的傅立葉(Fourier)針對週期性聲音進行研究，發現任何聲音都可以用簡單的正弦函數各項的組合來表示；而人類得以發明電視機及其他視訊器材，更是從小提琴的琴弦振動所推導出來的(Stewart，1997)；並藉由英國泰勒(Taylor)所發表琴弦的基本振動頻率公式所衍生之數學計算方法，提昇弦樂器

之教學品質(翁瑞霖，2002)。同時亦由可見光與十二平均律的探討中，以數學演算分析之方式，推論音樂與色彩的相對應關係(翁瑞霖，2003)；並應用數學的規律性和對稱性，解析和探討莫札特的音樂效應(翁瑞霖，2004a)。而眾所週知的黃金比例，就是和諧性最完美的典型表現，除了建築造型上的普遍運用外，其美的效應亦運用在樂曲各部分之間完美的數學比例關係(童忠良，1993；翁瑞霖，2004b)。

近代對於音樂的數學研究方面，首推俄裔美籍音樂理論家薛林格(Schillinger)，他在 1941 年出版了 12 本名為 Schillinger System of Music Composition 的著作，藉由數學來發展科學上的或合乎科學的全新音樂本質。這個系統也被形容為一種在電腦出現以前的電腦音樂，在他的許多作品中，似乎也預知以演算式作曲的發展前景(吳鼎武‧瓦歷斯，2003)。而隨著對數學與音樂關係之認識的不斷加深，以數學計算代替作曲，已成為現代作曲家的一種創作方式，其所創作之樂曲乃是將作曲的過程公式化，把音程、節奏、音色等素材都編成數碼，然後按照需求發出指令，以計算機的功能進行選擇，再將其結果編寫成樂曲並演奏出來，在在顯示出數學與音樂密不可分的關係(童忠良，1993)。

筆者於八十九學年從科學專業課程之講授，轉而開授通識教育課程。為期許能有別於一般之通識課程，提供通識教育課程講授之另一種思考模式，因而選定藉由跨領域的科學與人文藝術的融合為主題，提出博雅涵養課程「自然科學與音樂」，並經本校通識教育委員會審核通過，開課迄今已進入第 6 個學年。由於「自然科學與音樂」課程內容規劃科學與音樂的各種對話，使筆者對於這個主題，必須有更深一層的探索彙整及研究分析，也因此促使筆者從純科學的專業研究和教學，轉而投入通識教育領域；也因為這個轉變，讓筆者在科際整合的發展中找到新的研究領域和方向，並因而獲得許多心得，尤其是數學與音樂的對話方面。本文將藉由講授跨領域通識教育課程「自然科學與音樂」所衍生之相關研究成果，探討音樂中數學的應用。

貳、研究目的與方法

一、研究目的

本研究的目的是期望藉由數學與音樂的多元對話，探討數學與音樂領域的關係，增進科技與人文藝術融合，並提供科際整合的另一種思考模式。同時以數學的圖表或演算來呈現音樂的對稱性和規律性之美，給予音樂學習者不同的參考形式，進而提昇學習成效。

二、研究方法

本研究之方法為文獻資料的蒐集和彙整、分析和探討及簡單的數學解析模式之建立。其研究步驟如下：

首先蒐集和彙整數學與音樂的對話

之相關文獻資料；並由後續的文獻資料分析和探討過程中，了解數學在音樂領域中之各種應用情形和數學與音樂互動的相關範例；同時選定樂曲結構的黃金比例應用、音階組成的數學解析、五度相生律的應用範例與數學的關係、及音樂的數學二元座標圖等為本研究的範圍，並著手進行其與數學關係的解析和探討。

在確認研究素材之後即著手建立簡單的數學解析模式，其過程如下：首先分析樂曲之結構，是否符合完美數學比例關係的黃金比例。本研究採用以小節數來計算樂曲之結構比例，所分析的樂曲範例為絕大多數小提琴初學者所使用的二套教材，包括由著名小提琴教育家鈴木鎮一所著之鈴木小提琴教材全套共 8 冊、篠崎弘嗣所著之篠崎小提琴教材全套共 6 冊；以及部分著名的小提琴舞曲。而為了分析和敘述之方便，本研究對於樂曲結構是否遵守黃金分割原則，將樂曲重要分段處對全曲之小節數比值，與黃金數 0.618 之誤差在 5%(即 0.587 ~ 0.649)以內，視為符合黃金比例者；誤差在 10% (即 0.556 ~ 0.680) 以內，視為近似黃金比例者；而超過 10% 以上者則屬黃金分割法則不存在之範圍。

在分析樂曲結構與黃金比例的關係之後，緊接著探討畢氏音階、純律音階和十二平均律音階的數學解析，以及五度相生律的數學探討和應用範例。本研究最後步驟乃探討 22 種音程和 15 個升降記號大音階的數學二元座標圖，意即分別將音程度數設為 X 軸、間隔的半音數目為 Y 軸；升降記號大音階設為 X 軸、升降記號數目為 Y 軸，以 X-Y 的二元平面圖來呈現音程和音階之高度和諧性、對稱性和規律性這些經常出現在幾何、代數或是統計等數學領域中之美的形式。

參、名詞解釋

一、音樂領域的數學應用

所謂音樂領域的數學應用，乃運用數學的思維模式、演算方式、統計分析、及推理、實驗、歸納或演繹等方法，來處理或探討音樂領域相關的各種議題。

二、黃金比例

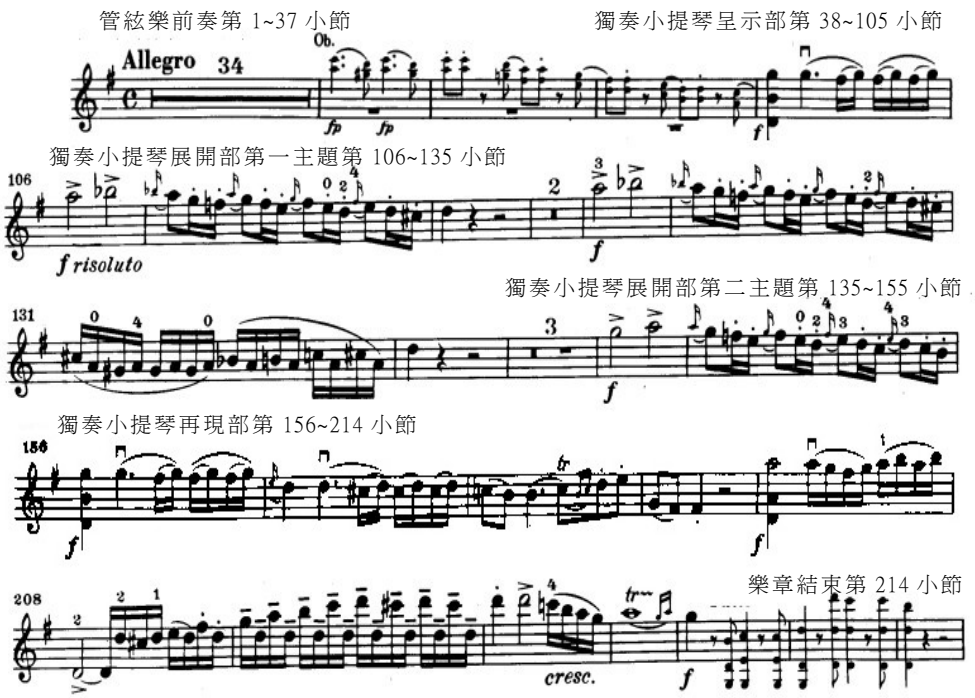
（一）定義

所謂黃金比例，其定義為：將某線段 AC 分為長線段 AB 和短線段 BC 兩部分，如長線段 AB 對全線段 AC 的比，等於短線段 BC 對長線段 AB 的比，則稱此線段之比例為黃金比例，如下列線段所示：

由上述黃金比例的定義得知當 AB ： AC ＝ BC ： AB 時，稱此線段之比例為黃金比例(九章出版社編輯部，1992；Wheeler，1994)。假設 AB 段長為 X，BC 段長為 Y，則依原比例關係，由 XY 之二元二次方程式 X^2-XY-Y^2= 0 可計算出 Y / X ＝ ($\sqrt{5}$ － 1) / 2 ≒ 0.618。故此 0.618：1 的比例即是所謂的黃金比例或黃金分割，而 0.618 則稱為黃金數(蔡聰明，2001)。

（二）黃金分割法則及譜例

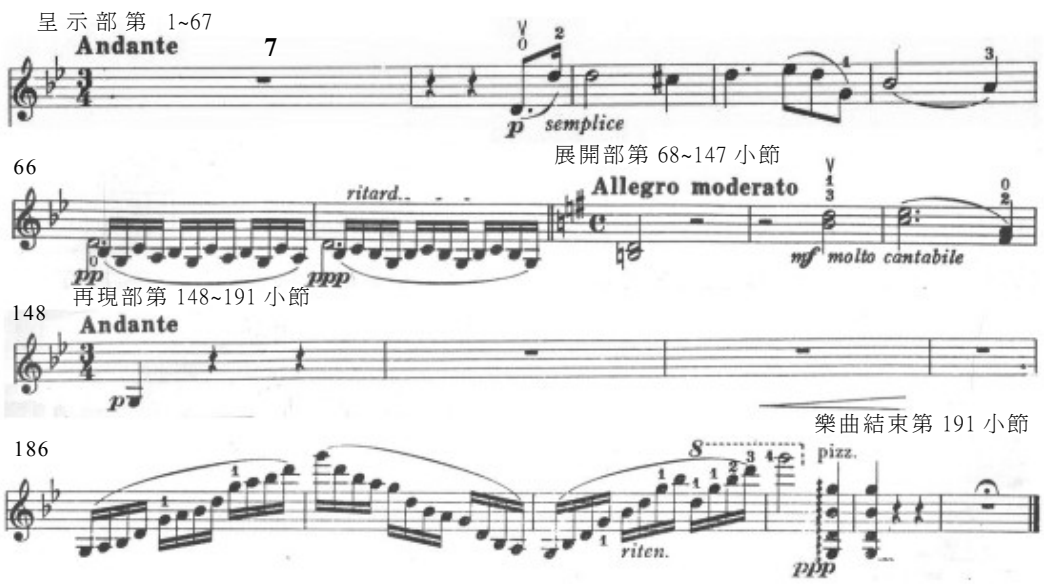
所謂黃金分割法則，其定義如下：當樂曲之結構符合或近似黃金比例，則其黃金分割點應出現在全曲之黃金數 0.618 或近似 0.618 處；亦即將全曲之小節數乘以 0.618，或更嚴謹的將節拍數乘以 0.618。此時若屬黃金分割點，則此處應相當於該曲之重要段落、附屬主題、轉調段落、主題再現部、發展部或是歌曲的副歌開始之處(童忠良，1993)。本文以莫札特(W.A.Mozart)小提琴「協奏曲第三號」第一樂章為樂曲結構分析範例說明如譜例一：此樂章為 G 大調、拍號 4/4、速度 Allegro，曲式為奏鳴曲式，全樂章共有 214 小節，包括管絃樂前奏第 1～37 小節共 37 小節；獨奏小提琴呈示部第 38～105 小節共 68 小節；獨奏小提琴展開部第一主題第 106 ～ 135 小節共 30 小節；獨奏小提琴展開部第二主題第 136 ～155 小節共 20 小節；獨奏小提琴再現部第 156 ～ 214 小節共 59 小節。故此曲在獨奏小提琴展開部第一主題結束時出現黃金分割點，其比值為 (37+68+30) / 214 = 0.631 符合黃金分割法則(翁瑞霖，2004a)。

譜例一　莫札特小提琴「協奏曲第三號」第一樂章

此外，另有一種樂曲結構，乃樂曲重要段落處之後所剩餘之小節數佔全曲小節數之 0.618，即「前段短後段長」的結構(童忠良，1993)。本文以威尼奧夫斯基(H.Wieniawski) 所作之小提琴名曲「傳奇曲(Legende)」為樂曲結構分析範例說明如譜例二：該曲全長共有 191 小節，可以明確分為三個段落。第一段呈示部第 1 ~ 67 小節，為 g 小調、拍號 3/4、速度 Andante，共 67 小節；第二段展開部第 68 ~ 147 小節，為 e 小調、拍號 4/4、速度 Allegro Moderato，共 80 小節；第三段再現部第 148 ~ 191 小節，為 g 小調、拍號 3/4、速度 Andante，共 44 小節。如以一般「前段長後段短」之黃金分割法則計算此曲，則其比值為(67+80) / 191 = 0.770，並不符合黃金分割法則；然而若以「前段短後段長」之方式計算，則其後段小節數對全曲小節數之比值為(80+44) / 191 = 0.649，近似黃金數，符合黃金分割法則(翁瑞霖，2004b)。

三、音階

（一）畢氏音階

畢達哥拉斯和他的後繼者師法美索不達米亞和埃及人，將數字觀念應用在音樂上，對希臘和後來的歐洲音樂理論，產生極為深遠的影響，為希臘音樂理論之開山鼻祖。他曾經用一琴弦計算每一個可能推想得到的音程，並定出其長度比例，發現了音樂的音程完全與整數的比值有關，而得到如表一的畢氏音階，其中 C^1 代表比音 C 高一個八度音程(童忠良，1993；黃嘉彥，2000)。

譜例二 威尼奧夫斯基小提琴名曲「傳奇曲(Legende)」

（二）純律音階

在畢氏音階中，E、A、B 三個音對音 C 的頻率比值分別是 27/16、81/64 和 243/128，並沒有呈現如同其他音非常簡單的整數比；因此，天文學家兼數學家拖勒密(Ptolemy)利用和弦的升降，將 E、A、B 之比值分別修正為 5/4、5/3、15/8，而得到表二之純律音階（蔡聰明，1994）。

（三）十二平均律音階

所謂十二平均律，即將 1 個完全八度音程按數學等比數列劃分為 12 個部分，每 1 個部分即為 1 個半音，每 2 個半音則構成 1 個全音；而每 1 個半音之振動頻率為前 1 個半音之 $\sqrt[12]{2}$ 倍。我們稱之〝十二平均律〞、〝十二等比律〞，或簡稱〝平均律〞，其所得到如表三之音階則稱為十二平均律音階。

肆、研究結果與討論

一、黃金比例在樂曲結構的應用範例

畢達哥拉斯及其學派，在數學領域中努力追求和諧與完美，使他們從正五邊形的邊長和對角線的比例中發覺了黃金比例(孫文先，1996)；而從正五邊形所獲得黃金比例的相關發現，推得畢氏學派的入派標誌正五角星，其所內接之正五邊形邊長與正五角星邊長，亦存在黃金比例的關係(洪建全教育文化基金會，1985；童忠良，1993)。畢氏學派之所以會對黃金比例產生興趣，乃因希臘人認為真善美是一體的，而黃金比例中即包含了藝術的「美」、數學的「真」、和應用的「善」(洪建全教育文化基金會，1985)。

完美的藝術創作，其基礎就是作品各部份之間完美的數學關係，故音樂結構的美的效應，也同樣有賴於樂曲各部份之間

表一、畢氏音階

音名	C	D	E	F	G	A	B	C^1
比值	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

表二、純律音階

音名	C	D	E	F	G	A	B	C^1
比值	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

表三、十二平均律音階

音名	C	D	E	F	G	A	B	C^1
比值	1	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^2$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^4$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^5$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^7$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^9$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{11}$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12}$

的完美數學比例關係。費波納契數列和黃金比例應用在樂曲結構的範例很多，例如莫札特(Mozart)的奏鳴曲、貝多芬(Beethoven)的第五號交響曲、巴爾托克(Bartok)的第四號弦樂四重奏等。其中又以巴爾托克作品的黃金比例應用最為著名，尤其是他於1937年所開始編纂一套包括6冊153首樂曲的鋼琴曲集「小宇宙」，富含教育意義，極為獨特；其難度為循序漸進的方式，從第1冊的基本手指練習，到第6冊的高難度音樂會演奏曲。將此「小宇宙」全集依前述黃金分割法則加以計算後，其中大約有80%明確的顯示出這些作品之曲式結構，和黃金分割的規律有著密切的關係，如表四所示(童忠良，1993；Locke，1987；Lendvai，1971；Mine，1999)。

本研究嘗試將小提琴教學重要的啟蒙教材鈴木鎮一所著之「鈴木小提琴教材」全套共8冊，及篠崎弘嗣所著之「篠崎小提琴教材」全套共6冊進行分析，發現有許多樂曲都存在黃金分割法則，尤其是舞曲類之樂曲，不論是嘉禾舞曲、小步舞曲、布雷舞曲、圓舞曲、庫朗特舞曲或其他舞曲，其樂曲之結構超過80%存在黃金比例的分割，其分析結果整理如表五所示。

上述表五中存在黃金比例分割之舞曲類作品的明細如表六所示。

為了多方確認黃金分割法則在舞曲類作品的結構應用是否如前述之推論，本研究嘗試分析其他著名小提琴舞曲，而獲得表七之分析結果(〝*〞表示以「前段短後段長」的方式計算)，再一次確認舞曲類作品之樂曲結構，均十分顯著的符合黃金分割法則，與黃金比例存在密切的關係。

表四、巴爾托克「小宇宙」全集及各分冊之黃金比例應用統計表

冊數	曲數	黃金分割法則存在的曲數	黃金分割法則存在的比例
第1冊	36曲	23曲	23 / 36 = 64 %
第2冊	30曲	22曲	22 / 30 = 73 %
第3冊	30曲	26曲	26 / 30 = 87 %
第4冊	25曲	23曲	23 / 25 = 92 %
第5冊	18曲	15曲	15 / 18 = 83 %
第6冊	14曲	14曲	14 / 14 = 100 %
全集	153曲	123曲	123 / 153 = 80 %

表五、「鈴木小提琴教材」及「篠崎小提琴教材」舞曲類作品之黃金比例應用統計表

舞曲種類	曲數	黃金分割法則存在的曲數	黃金分割法則存在的比例
嘉禾舞曲	11首	9首	9 / 11 = 82%
小步舞曲	8首	7首	7 / 8 = 88%
布雷舞曲、圓舞曲、庫朗特舞曲或其他舞曲	19首	16首	16 / 19 = 84%
全部舞曲	38首	32首	32 / 38 = 84%

表六、存在黃金比例分割之舞曲範例明細表

舞曲名	作者	調性	拍號	比值
嘉禾舞曲	L.V.Beethoven	G 大調	4/4	44 / 77 = 0.571
	J.B.Lully	a 小調	2/2	34 / 55 = 0.618
	P.Martini	G 大調	2/2	56 / 88 = 0.636
	A.Thomas	G 大調	2/4	46 / 71 = 0.648
	J.S.Bach	D 大調	4/4	52 / 80 = 0.650
		g 小調	2/2	32 / 48 = 0.667
	J.Becker	g 小調	4/4	16 / 24 = 0.667
	F.J.Gossec	D 大調	4/4	32 / 48 = 0.667
	J.P.Rameau	D 大調	2/2	48 / 72 = 0.667
小步舞曲	W.A.Mozart	D 大調	3/4	58 / 94 = 0.617
		d 小調	3/4	63 / 102 = 0.618
		F 大調	3/4	32 / 48 = 0.667
	J.S.Bach 第一小步舞曲	G 大調	3/4	32 / 48 = 0.667
	第二小步舞曲	G 大調	3/4	32 / 48 = 0.667
	第三小步舞曲	G 大調	3/4	16 / 24 = 0.667
	L.V.Beethoven	G 大調	3/4	32 / 48 = 0.667
吉格舞曲	J.S.Bach	D 大調	6/8	20 / 34 = 0.588
布雷舞曲		G 大調	2/2	52 / 80 = 0.650
庫朗特舞曲		D 大調	3/4	28 / 42 = 0.667
圓舞曲	J.Brahms	G 大調	3/4	14 / 22 = 0.636
第五號匈牙利舞曲		g 小調	2/4	92 / 142 = 0.648
露西亞舞曲	H.Shinozaki	a 小調	2/4	24 / 40 = 0.600
基格舞曲	F.M.Veracini	d 小調	12/8	34 / 56 = 0.607
波羅奈斯舞曲	C.Dancla	d 小調	3/4	24 / 39 = 0.615
金婚式舞曲	G.Marie	a 小調	4/4	64 / 104 = 0.615
庫朗特舞曲	A.Corelli	F 大調	3/4	29 / 46 = 0.630
舞曲	Hohmann	c 小調	2/4	36 / 56 = 0.643
多瑙河細波圓舞曲	J.Ivanovia	a 小調	3/4	32 / 48 = 0.667
布雷舞曲	G.F.Handel	G 大調	4/4	44 / 66 = 0.667
妖精舞	N.Paganini	D 大調	2/4	16 / 24 = 0.667
土風舞	C.M.Weber	D 大調	3/4	48 / 72 = 0.667
德國舞曲	K.D.Dittersdorf	降 E 大調	3/8	32 / 48 = 0.667

表七、著名小提琴舞曲黃金比例應用之範例

舞曲名	作者	調性	拍號	比值
第一號匈牙利舞曲	J.Brahms	g 小調	2/4	112 / 187 = 0.599
溜冰者圓舞曲	E.Waldteufel	C 大調	3/4	101 / 165 = 0.612
安妮特拉之舞	E.Grieg	b 小調	3/4	32 / 52 = 0.615
夏康舞曲	T.A.Vitali	g 小調	3/2	126 / 195 = 0.660
馬拉蓋牙舞曲	P. Sarasate	D 大調	3/8	*123 / 204 = 0.603
察巴替亞舞曲	P. Sarasate	A 大調	6/8	93 / 140 = 0.666
哈巴奈拉舞曲	P. Sarasate	d 小調	2/4	119 / 180 = 0.661
庫亞威舞曲	H.Wieniawski	a 小調	3/4	*64 / 103 = 0.621
華麗的波羅耐舞曲	H.Wieniawski	A 大調	3/4	*172 / 267 = 0.644
諧謔曲－塔倫泰拉舞曲	H.Wieniawski	g 小調	6/8	270 / 423 = 0.638
西班牙舞曲	E.Granados	G 大調	6/8	64 / 96 = 0.667
笙舞	黃輔棠	E 大調	2/4	*36 / 60 = 0.600
手鼓舞	黃輔棠	D 大調	2/4	93 / 148 = 0.628
D 羽調舞曲	黃輔棠	d 小調	3/8	91 / 152 = 0.599
E 徵調舞曲	黃輔棠	E 大調	3/4	78 / 127 = 0.614
春燈舞	黃友棣	D 大調	2/4	98 / 156 = 0.628
舞曲	靳延平	A 大調	2/4	78 / 129 = 0.605
內蒙組曲三、塞外舞曲	馬思聰	a 小調	2/4	*132 / 215 = 0.614

二、音階的數學解析

由前述之畢氏音階和純律音階的頻率比值，本研究分析其小二度音程及大二度音程頻率關係，如表八所示。

純律音階中的小二度音程頻率比值為 16/15，較畢氏音階中的 256/243，呈現更簡單的整數比例；然而其大二度音程的頻率關係，除了畢氏音階所顯現的 9/8 之外，另存在一組 10/9 的比值。故畢氏音階雖然因為音 E、A、B 沒有呈現非常簡單之整數比，而經拖勒密修正成具有非常簡單整數比的純律音階，但是畢氏音階音程之間所形成的頻率比例關係，卻較純律音階呈現更高的規律性。

表八、畢氏音階和純律音階的小二度音程及大二度音程頻率關係

音程	大二度 (D/C)	大二度 (E/D)	小二度 (F/E)	大二度 (G/F)	大二度 (A/G)	大二度 (B/A)	小二度 (C^1/B)
畢氏音階頻率比值	9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243
純律音階頻率比值	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

然而，如果依目前樂理對大二度音程(1 個全音)和小二度音程(1 個半音)的定義而言，無論是畢氏音階的 9/8 和 256/243，或是純律音階的 9/8、10/9 和 16/15，其大小二度音程頻率比例之間，既不存在 1 個半音為 1 個全音頻率的 1/2 之算術平均關係，亦不存在 1 個半音為 1 個全音頻率開二次方之幾何平均關係，故在使用升降半音時，會有不相等頻率的〝音差〞情形出現。例如音 C 和音 D 之間隔為 1 個全音，依上述兩種音階將音 C 升半音後所獲得之頻率，和音 D 降半音後的頻率並不相同，此二者頻率之差即所謂的〝音差〞。

故隨著音樂的發展，雖然音樂家都採用上述兩種音階來演出，然而在移調、轉調、以及不同樂器一起演奏的和諧度上，均無法符合演奏者或音樂創作者的需求（蔡聰明，1994）。因此無論東西方的音樂家和律學家，都曾為此感到困惑難解。而為了解決這個移調、轉調和和諧度(音差)的問題，兩方的音樂體系從各自的音律傳統出發，分別經歷了漫長且艱辛的探索，最後終於殊途同歸於相似的平均律制，而產生了前文所敘述之能夠轉調、移調，同時具有和諧度的十二平均律音階(童忠良，1993)。

如以 1939 年國際間訂定音樂會絕對音高 A 的頻率為 440 Hz，則可依十二平均律計算出從 C 至 C^1 之 12 個半音的比值及其頻率。有了絕對音高的訂定和十二平均律的基本運算之後，樂器可依此調整其音律。就像調整一台物理儀器一樣，對準標準音高就是找到基準點，再用此基準點根據十二平均律制調準其他音(龔鎮雄，1996)。由於十二平均律的合理與實用，解決了長久以來移調和轉調的一大難題，並因而使音樂的展現形成更加多元化的形式及風格；特別是琴鍵樂器，可以根據需要而自由地使用所有的琴鍵。故直到今日，十二平均律在西方仍被普遍地看作是〝標準調音〞或〝標準的西方音律〞(童忠良，1993)。

三、五度相生律的數學探討及應用

畢氏音階所有的音都是由完全五度音程的關係所推演出來的，因此，其所產生之律制稱為〝五度相生律〞。在五度相生律中，全部音階的音是由一系列 5 個連續的高完全五度音程和 1 個低完全五度音程得來，其推演的過程簡化後如下：首先由音 C 以 5 個連續的高完全五度音程推得音 G、D、A、E、B，即 C(1)→G(3/2)→D^1(9/4)→D(9/8)→A(27/16)→E^1(81/32)→E(81/64)→B(243/128)；接著由音 C 以 1 個低完全五度音程推得音 F，即 C(1)→F_1 (2/3)→F(4/3)，其中 F_1 代表比音 F 低一個八度音程。

由五度相生律推演畢氏音階的模式，本研究嘗試使用其他不同音程之相生律來推演畢氏音階，結果發覺其中只有〝四度相生律〞具有相同的功能，即所有的音都是由完全四度音程的關係所推演出來的。在四度相生律中，全部音階的音是由 1 個高完全四度音程和一系列 5 個連續的低完全四度音程得來，其推演的過程亦簡化如下：首先 由音 C 以 1 個高完全四度音程推得音 F，即 C(1)→F(4/3)；接著由音 C 以 5 個連續的低完全四度音程推得音 G、D、A、E、B，即 C(1)→G_1(3/4)→G(3/2)→D(9/8)→A_1(27/32)→A(27/16)→E(81/64)→B_1(243/256)→B(243/128)。

由五度和四度兩種相生律所獲得之音階，其頻率比值完全相同；若以目前樂理所定義之每一個八度音程有 12 半音來分析，則上述結果是可以預期的。因為五度相生律採完全五度方式推演各音，其音程間隔為 7 個半音；而四度相生律採完全四度推演各音，其音程間隔為 5 個半音。已知往上 7 個半音與往下 5 個半音，所獲得為相差 1 個八度的同一個音；同理往下 7 個半音與往上 5 個半音，所獲得的亦為相差 1 個八度的同一個音，此種互補之情形稱為轉位的關係。

故在五度相生律中以音 C 之頻率為 1，經過 5 個連續的高完全五度音程和 1 個低完全五度音程得到整個音階；而在四度相生律中則仍以音 C 之頻率為 1，但是卻相反於五度相生律的音程方向，改採經過 1 個高完全四度音程和 5 個連續的低完全四度音程，而得到整個音階。其推演的過程完全相同，所得之結果也相同，其唯一不同處，乃在於往高和往低的音程方向及間隔之半音數目不同而已，也因而形成五度相生律和四度相生律彼此互補的關係。至於其他音程相生律，經實際演算後證實均無法推演出畢氏音階。

畢達哥拉斯所發明之五度相生律，除了推演出畢氏音階之外，在其他音樂領域中也扮演非常重要的角色，而其中更蘊藏著許多數學的應用。以調性為例，依升記號數目之增加，其大調調性之順序依次為 C(0)、G(1)、D(2)、A(3)、E(4)、B(5)、$^{\#}$F(6)、$^{\#}$C(7)，其中( )內之數字代表升記號的數

目。從中可以明顯看出音 G 為音 C 之高完全五度音程，音 D 亦為音 G 之高完全五度音程，以此類推得知升記號之大調調性乃以 C 大調為基礎，運用高完全五度音程之五度相生律所製造出的新調，現今的樂理稱之為〝上五度移調法〞；而因為這些音階必須使用升記號，故又稱為〝升記號大音階〞。

同理依降記號數目之增加，其大調調性之順序依次為 C(0)、F(1)、^{b}B (2)、^{b}E(3)、^{b}A(4)、^{b}D(5)、^{b}G(6)、^{b}C(7)，其中( )內之數字代表降記號的數目，從中亦可以明顯看出音 F 為音 C 之低完全五度音程，音 ^{b}B 亦為音 F 之低完全五度音程，以此類推得知降記號之大調調性亦以 C 大調為基礎，運用低完全五度音程之五度相生律所製造出的新調，現今的樂理稱之為〝下五度移調法〞；而因為這些音階必須使用降記號，故又稱為〝降記號大音階〞。

其次，從同調號的相對應大小調所形成的關係調，即大小調之間所存在小三度音程的和諧關係，亦可推論小調之調性也應遵從五度相生律。例如：a 小調為 C 大調之關係小調，音 C 為音 A 之高小三度音程，e 小調為 G 大調之關係小調，音 G 為音 E 之高小三度音程；而大調之音 G 為音 C 之高完全五度音程，小調之音 E 亦為音 A 之高完全五度音程，故依此類推可知其他同調號的相對應大小調，亦形成如同上述的和諧的關係。

此外，從升降記號的先後順序，亦可看出其與五度相生律之關聯及其規律性。已知升記號的順序依次為 F、C、G、D、A、E、B，此順序乃以調升音 F 為起點，用高完全五度音程相生方式，依序調升其它的音；而降記號的順序則恰為升記號的相反順序 B、E、A、D、G、C、F，此乃因其以調降音 B 為起點，用低完全五度音程相生方式，依序調降其它的音。故升降記號的先後順序，亦皆遵守五度相生律。

而提琴系列樂器小提琴、中提琴和大提琴所使用之 4 條琴弦，其彼此間的頻率關係亦存在五度相生律。以小提琴為例，其 4 條琴弦之頻率由低至高分別是 G_1(比音 G 低 1 個八度)、D、A、E^1(比音 E 高 1 個八度)，其中音 G_1 至音 D、音 D 至音 A 和音 A 至音 E^1，均為完全五度音程，彼此間音高之差為 7 個半音。同理中提琴之 4 條琴弦 C_1、G_1、D、A；及大提琴之 C_2(比音 C 低 2 個八度)、G_2、D_1、A_1，其琴弦之間音高之差皆為完全五度音程，亦都遵守五度相生律。

由於黃金比例在各種領域的普遍運用，展現了其最完美的和諧性；也因此與它同樣出於畢達哥拉斯學派且關係密切的五度相生律，其在音樂領域發展所具有的重要性，自然是可以預期的；而畢達哥拉斯在音律上的這一個偉大成就，經由其弟子及後人的傳播，確立了五度相生律在世界律學史上的地位，對西方音樂的發展有極大的影響。

四、音樂的數學二元座標圖

（一）音程座標圖

音程為兩音之間的高度關係，用〝度〞來表示其間隔；其度數是由譜表上的音符位置決定，和半音或全音並無關係。故同高度的 2 個音稱為一度，緊鄰的 2 個音稱為二度，以此類推增至八度時，成為同音名而相差八度的 2 個音(黑澤隆朗，1995)。然而當考慮半音或全音時，相同音程會因所具有之半音或全音數目不同，而形成 14 種自然音程，再加上因為臨時升降記號加入所形成之 8 種變化音程，總計形成了 22 種音程。本文將此 22 種音程分別依照度數和間隔的半音數目作區分，可整理歸納如表九、十：

表九、音程依照度數作區分

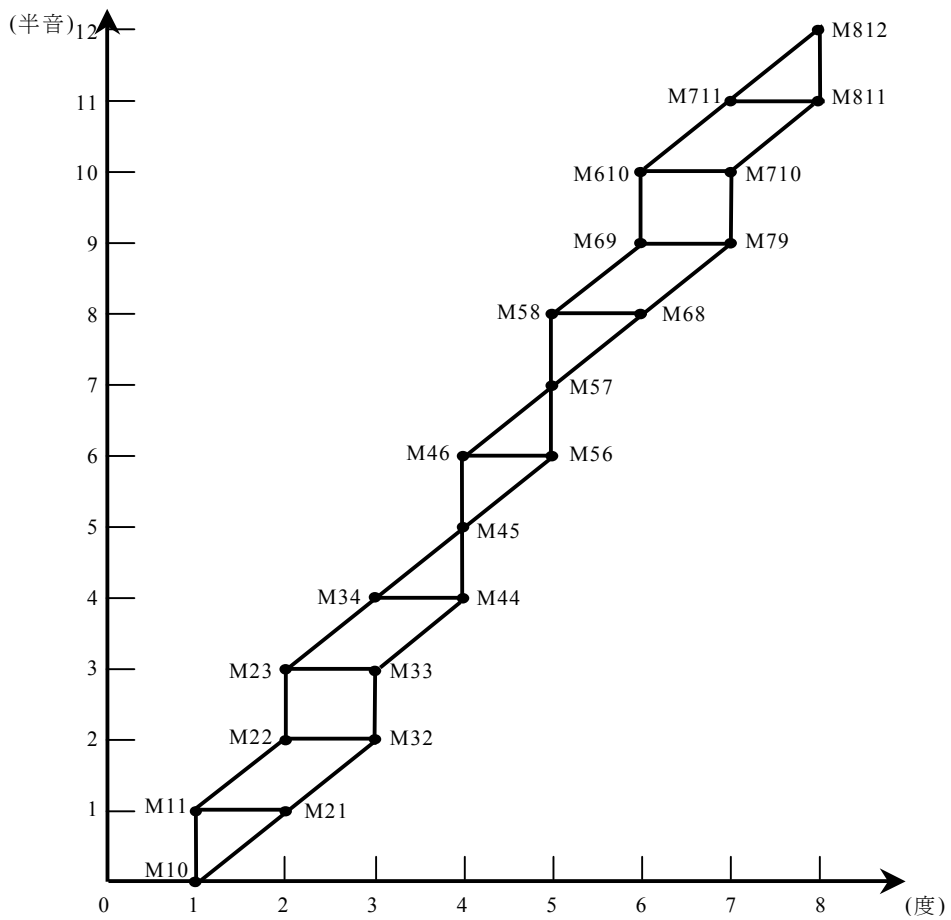
音程度數	音程數目	音程名稱(半音數目)
一度	2	完全一度(0)；增一度(1)
二度	3	小二度(1) ；大二度(2)；增二度(3)
三度	3	減三度(2) ；小三度(3)；大三度(4)
四度	3	減四度(4) ；完全四度(5)；增四度(6)
五度	3	減五度(6) ；完全五度(7)；增五度(8)
六度	3	小六度(8) ；大六度(9)；增六度(10)
七度	3	減七度(9) ；小七度(10)；大七度(11)
八度	2	減八度(11) ；完全八度(12)

表十、音程依照間隔的半音數目作區分

半音數目	音程數目	音程名稱
0	1	完全一度
1	2	增一度 ； 小二度
2	2	大二度 ； 減三度
3	2	增二度 ； 小三度
4	2	大三度 ； 減四度
5	1	完全四度
6	2	增四度 ； 減五度
7	1	完全五度
8	2	增五度 ； 小六度
9	2	大六度 ； 減七度
10	2	增六度 ； 小七度
11	2	大七度 ； 減八度
12	1	完全八度

從上述分別依照音程度數和間隔的半音數目作分，所整理歸納出的 2 個表格，本研究將其轉換為 X-Y 二元平面圖，即假設音程度數為 X 軸，間隔的半音數目為 Y 軸，則每種音程在 X-Y 二元平面圖上都存在一個座標 Mxy，例如 M10(一度 0 半音)：表示音程度數為一度、間隔的半音數目為 0 個，即是完全一度音程；M21(二度 1 半音)：表示音程度數為二度、間隔的半音數目為 1 個，即是小二度音程；M32(三度 2 半音)：表示音程度數為三度、間隔的半音數目為 2 個，即是減三度音程，其它音程則依序類推。

本研究嘗試將此 X-Y 二元平面圖上的各音程座標點連線，獲得如圖一具有高度對稱性的音程座標圖形。而原本看似複雜、沒有秩序的 22 種音程，經由 X-Y 二元平面圖的連線及分析說明，可以明顯看出各種音程之間所呈現的高度和諧性、規律性和對稱性。而相較於傳統以文字敘述音程，本研究將音程經由表格式的歸納整理和圖形式的分析說明，相信能提供音樂學習者另一種思考的模式。

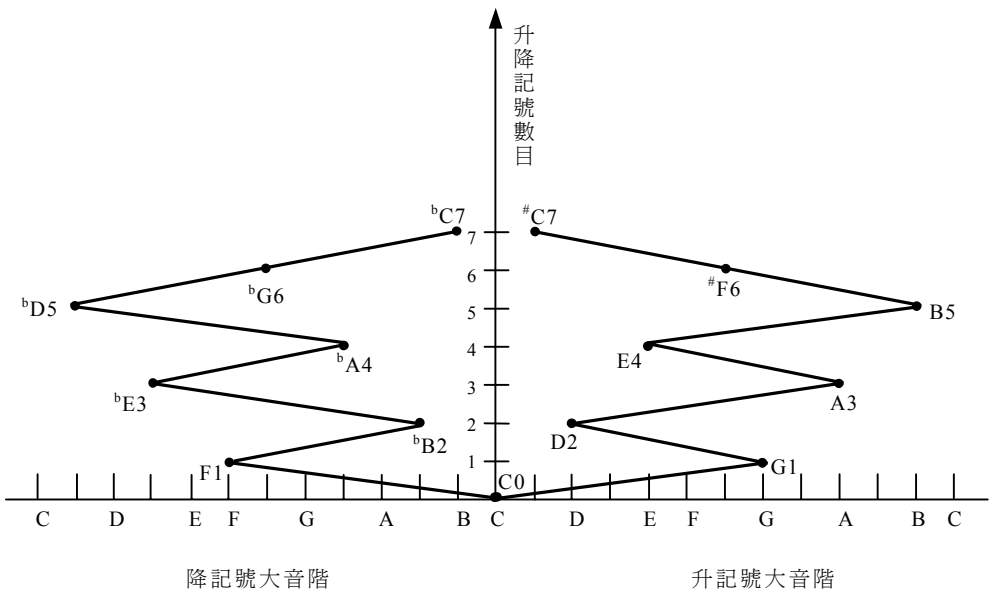


圖一、音程座標圖

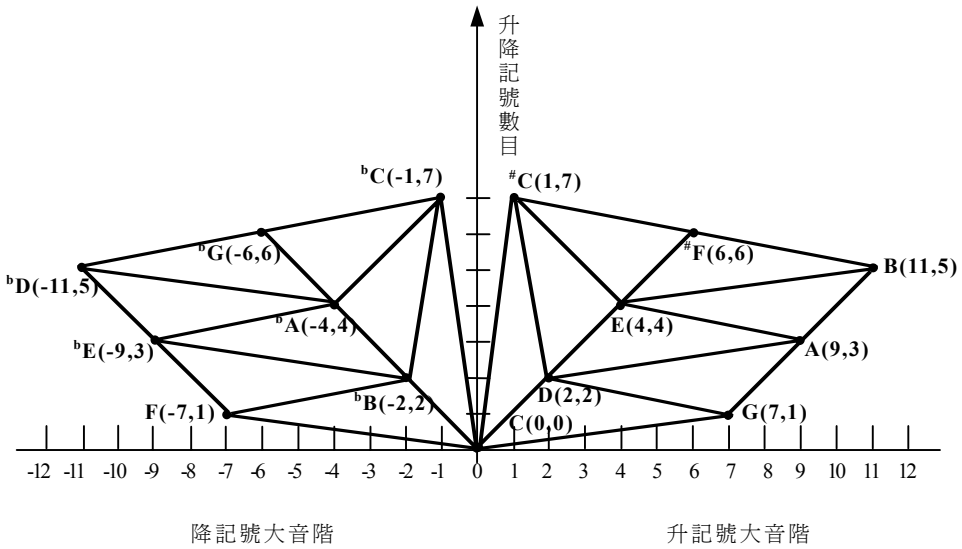
（二）音調座標圖

如前文所述，依升記號數目之增加，其〝升記號大音階〞大調調性之順序依次為 C(0)、G(1)、D(2)、A(3)、E(4)、B(5)、$^{\#}$F(6)、$^{\#}$C(7)；而依降記號數目之增加，其〝降記號大音階〞大調調性之順序依次為 C(0)、F(1)、^{b}B (2)、^{b}E(3)、^{b}A(4)、^{b}D(5)、^{b}G(6)、^{b}C(7)，其中( )內之數字分別代表升降記號的數目。本研究嘗試以 X-Y 的二元平面圖來呈現升降記號大音階，即將升降記號大音階設為 X 軸，升降記號的數目設為 Y 軸，因此每一個大調在 X-Y 的二元平面圖中都會有其個別的座標，例如 G1 表示 1 個升記號的 G 大調，其座標為(G，1)；而 ^{b}B2 表示 2 個降記號的 ^{b}B 大調，其座標則為(^{b}B，2)；其他各升降大調依此類推，則可獲得如圖二所示因五度相生律所產生具有高度和諧性、規律性和對稱性的音調座標圖形。

本研究進一步將圖二之 X 座標由音名改以數字來表示，即升記號大音階之 C = 0、$^{\#}$C = 1、D = 2…..，降記號大音階之 B = -1、^{b}B = -2、A = -3…..，則圖二可以改寫為如下之圖三。



圖二、音調座標圖



圖三、音調數字座標圖

由圖三可看出在升記號大音階中所形成之線段 CG、DA 及 EB，兩兩互相平行；線段 DG、EA 及$^{\#}$CB，亦是兩兩互相平行；線段 C$^{\#}$F，也平行於線段 GB；各線段互相平行的情形亦以對稱的方式出現在降記號大音階中。此外，依照升記號大調調性之順序 C、G、D、A、E、B、$^{\#}$F、$^{\#}$C，計算所形成之 8 個三角形 Δ CGD、Δ GDA、Δ DAE、Δ AEB、Δ EBF、Δ$^{\#}$C CD、Δ$^{\#}$C DE、Δ$^{\#}$C E$^{\#}$F 面積皆相等，均為 6 平方單位；本研究進一步計算上述三角形之內角，結果顯示∠CDG = ∠DGA = ∠DEA = ∠EAB = ∠E$^{\#}$ F B = ∠CD$^{\#}$ C =124°，與黃金角 137.5°十分接近(翁瑞霖，2004b)；同樣的計算結果也以對稱的方式出現在降記號大音階中，顯示此由五度相生律所產生之音調座標圖亦存在黃金比例的現象。而除了線段的平行關係、三角形的等面積關係、黃金比例的關係之外，上述之音調所形成的座標圖，依不同形狀的組合所形成之全等、相似、平分、等分、比例、排列等情形，其所呈現之和諧性、規律性、對稱性的關係，更存在許多經常出現在幾何、代數或是統計等數學領域中之美的形式。

伍、結語

在一般的觀念中，數學與音樂是兩條涇渭分明的平行線，然而追溯至數千年前，其實數學與音樂都是藝術領域的一份子。西元前五、六世紀，古中國春秋戰國時代有禮、樂、射、御、書、數「六藝」，為當時知識份子必須學習的一些基礎科目，其中的樂是音樂，而數則是算術。而

在同一時期古希臘則將藝術分為「通俗藝術」和「自由藝術」，數學與音樂均屬後者；在當時期的教育更將音樂、數學及天文學視為一體，把算術、幾何、天文及音樂統整在數學之中，成為西方所謂「四藝」的教育內容。一直到十五世紀文藝復興時代，自由藝術中還包含著法律、天文等今天已被歸屬為社會科學或自然科學範疇的項目。到了十八世紀，西方正式提出「美的藝術」（Les Beaux Arts）的觀念，泛指一切為「美」的目的存在之人類活動，初步為我們今天統稱的「藝術」劃定了一個基本範圍，至此數學不再屬於藝術的類別而自成了一個系統。也因為各種領域分工愈細，壁壘愈分明的結果，使得數學與音樂逐漸形成了對立的兩個系統(蔣勳，1996；曾志華，2000)。

然而，處在這個多元的社會當中，科學、藝術和人文早已開始產生對話，它們之間原本存在的鴻溝也隨著教育改革而逐漸消失。當然我們不敢期望將會走回中古時期的知識領域分類，但肯定的是科學與人文或藝術絕非對立，而是有所對話、關聯及相互影響的。在教育部所訂定之中小學九年一貫課程「十大基本能力」中的「統整能力」，即主張理性與感性的相互協調；而將學習數學與音樂作統整或連結，以音樂相關情境為主題，探索其與音樂有關的問題，並藉由熟悉、簡易的數學概念或經驗運用其中，除了能獲得數學與音樂相關的知識外，更是促進思想清晰、明確、簡練的最佳途徑。本文藉由數學的簡易運算，探討其在音樂領域中的應用，在在顯示出數學與音樂密不可分的關係，期望能提供數學與音樂另一種的學習或教學模式，以利學習成效的提昇；然而音樂的呈現，最後仍需建立在其最重要的藝術(感性)本質上，而非僅有技術性和技藝性的數學運算(理性)。

本研究之屬性為跨數學和音樂兩個學術領域的範圍，從歷史的角度來看，這是一個一直被嘗試探討的議題，而且對數學和音樂的發展具有相當的影響；尤其音樂長久以來多以感性的層次聆聽和欣賞，如能以科學的理性方式來引導學習音樂產生的根本，無疑是一個有趣且具有效益的教學和學術研究的方向；對於學習者的統整能力，及促進科技與人文藝術的融合，也有其一定的助益，更符合國內教育界所倡導的課程統整理念。本文藉由跨領域之通識教育課程「自然科學與音樂」之講授，探討音樂與數學的關係，並運用學生在數學領域中較為熟悉的「加減乘除四則運算」和「XY 的二元座標圖」，用來敘述、說明和結合音樂領域相關的主題，以提昇非音樂專業學習者的音樂學習成效。其目的除了分享教學經驗，鼓舞大家積極參與通識教育課程之規劃，並提供通識教育課程教授之另一種思考模式之外；更期望藉由數學與音樂的多元對話，掌握其互動的軌跡，進而成為推動科際整合、促進科技與人文藝術融合的一股新生力量。

參考文獻

九章出版社編輯部 (1992)：科學家傳奇。台北：九章出版社。

王澄霞等 (1994)：自然科學概論。台北：三民出版社。

吳鼎武・瓦歷斯 (2003)：碎形音樂。科學月刊，34(11)，959-963。

翁瑞霖、許維楨 (2002)：由琴弦的振動看數學與音樂的對話。科學月刊，33(8)，708-713。

翁瑞霖、邱智藻 (2003)：音樂看得到？。科學月刊，34(11)，950-954。

翁瑞霖 (2004a)：數學與音樂的對話—探討莫札特音樂的數學應用及其效應。師大學報，49(2)，85-100。

翁瑞霖 (2004b)：黃金數的傳奇。科學月刊，35(4)，306-311。

孫文先編譯 (1996)：神秘有趣的數學。台北：九章出版社。

洪建全教育文化基金會編 (1985)：不朽的科學家(數學) 。台北：洪建全教育文化基金會。

童忠良等 (1993)：音樂與數學。北京：人民音樂出版社。

曾志華 (2000)：開啟數學與音樂的對話（上、下）。翰林文教雜誌，16，57-68。

黃嘉彥、張如梅 (2000)：科學與音樂的對話。科學月刊，31(6)，518-527。

黑澤隆朗著，邵義強譯 (1995)：樂理。台北：全音樂譜出版社。

歐陽絳 (1996)：數學的藝術。台北：九章出版社。

蔡聰明 (1994)：音樂與數學—從絃內之音到絃外之音。數學傳播，18(1)，78-96。

蔡聰明 (2001)：數學的發現趣談。台北：三民書局。

蔣勳 (1996) ：藝術概論。台北：東華書局。

龔鎮雄、董馨 (1996)：音樂中的物理。台北：牛頓股份有限公司。

Isacoff, S.著、陳相如譯 (2002)：平均律。台北：藍鯨出版社。

Lendvai, E. (1971) ： Bela Bartok: An Analysis of His Music (Reprint ed.). Pro Am Music Resources.

Locke, D. (1987) ： Numerical Aspects of Bartok’ s String Quartets. The Musical Times, 128:1732, 322.

Mine, H.著、林靜枝、丁佳甯譯 (1999)：偉大作曲家群像—巴爾托克。台北：智庫股份有限公司。

Storr, A.著、張嚶嚶譯 (1999)：音樂與心靈。台北：知英出版社。

Stewart, I.著、葉李華譯 (1997)：大自然的數學遊戲。台北：天下文化出版社。

Wheeler, R. E., & Wheeler, E.R. (1994) ： Modern Mathematics (9th ed.). Pacific Grove: Brooks/Cole.

投稿日期：民國 93 年 12 月 13 日
接受日期：民國 95 年 04 月 18 日

The Dialogue between Mathematics and Music-- A Study of the Application of Mathematics to Music

Jui-Lin, Ong

Department of Applied Chemistry, Fooyin University

Abstract

Mathematics as a representation of rationality produces aesthetics by its properties of order and harmony with music, and is closely connected to music though there is no transmission of sounds. On the other hand, without any number description, mathematics is all around the amplitude、frequency、quality、rhythm、melody、form and style of music. In this study, we try to provide the examples of the application of mathematics to music; the application of golden ratio to musical structure; the calculation and derivation of Pythagoras scale、pure scale and twelve-tone equal temperament scale; the application and analysis of mathematics in fifth-degree co-generation method; and the two-dimension research of the interval and scale. These discussions apparently show the strong correlation of mathematics and music. This study aims to provide a new concept to promote the integration of technologies and humanities from the diversified dialogues between mathematics and music.

Key words: music, mathematics, technologies, humanities