中學生通訊解題第三十八期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
3801

已知△ABC 之三邊長為 $\sqrt{29}$ 、$\sqrt{37}$ 、$\sqrt{52}$，求△ABC 之面積？

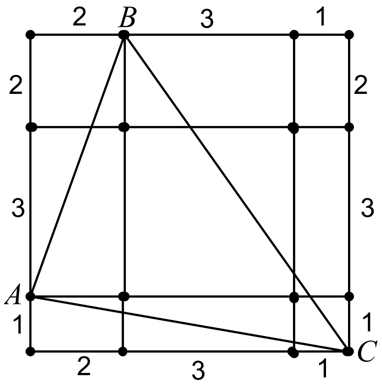
參考解答：

$\because\ \sqrt{29}=\sqrt{2^2+(2+3)^2}$ 、

$\sqrt{37}=\sqrt{1^2+(1+2+3)^2}$ 、

$\sqrt{52}=\sqrt{(1+3)^2+(1+2+3)^2}$

$\therefore$ 構造一個邊長為 2+ 3+ 1 之正方形：



△ABC 之面積 $=6^2-\dfrac{2\times5}{2}-\dfrac{4\times6}{2}-\dfrac{1\times6}{2}$

$=36-5-12-3=\boxed{16}$

解題重點：

利用對畢氏定理之理解，構造一個正方形，再扣除 3 個△之面積即可得所求△之面積。

問題編號
3802

(1) 從 {-10,-9,-8,…,-1,1,2,3,…,8,9,10} 中取出四個不同的數，其中兩個為正數，另兩個為負數，且其和為零，問有幾種取法？

(2)若將題目改成：從{-n,-(n-1),-(n-2),……,-1,1,2,3,……,(n-2),(n-1),n}中取出四個不同的數，其餘的條件均相同，則共有幾種取法？

參考解答：

(1)由觀察可知：

和	情形	組數
3	(-1,-2)	1
4	(-1,-3)	1
5	(-1,-4),(-2,-3)	2
6	(-1,-5),(-2,-4)	2
7	(-1,-6),(-2,-5),(-3,-4)	3
8	(-1,-7),(-2,-6),(-3,-5)	3
9	(-1,-8),(-2,-7),(-3,-6),(-4,-5)	4
10	(-1,-9),(-2,-8),(-3,-7),(-4,-6)	4
11	(-1,-10),(-2,-9),(-3,-8), (-4,-7),(-5,-6)	5
12	(-2,-10),(-3,-9),(-4,-8),(-5,-7)	5
13	(-3,-10),(-4,-9),(-5,-8),(-6,-7)	4
14	(-4,-10),(-5,-9),(-6,-8)	3
15	(-5,-10),(-6,-9),(-7,-8)	3
16	(-6,-10),(-7,-9)	2
17	(-7,-10),(-8,-9)	2
18	(-8,-10)	1
19	(-9,-10)	1

由上表可知從$\{-10,-9,-8,\cdots,-1,1,2,3,\cdots,8,9,10\}$中取出四個不同的數，其中兩個為正數，另兩個為負數，且其和為零，共有$1^2\times4+2^2\times4+3^2\times4+4^2\times4+5^2=145$種情形。

(2) (a)若 n 為奇數，取法數共有

$$4\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}k^2-(\frac{n-1}{2})^2$$

$$=4\times(\frac{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-1}{2}\times n}{6})-(\frac{n-1}{2})^2$$

$$=\frac{2n(n-1)(n+1)-3(n-1)^2}{12}$$

$$=\frac{(n-1)(2n(n+1)-3(n-1))}{12}$$

$$=\frac{(n-1)(2n^2-n+3)}{12}$$

(b)若 n 為偶數，取法數共有

$$4\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}k^2+(\frac{n}{2})^2$$

$$=4\times(\frac{\frac{n-2}{2}\times\frac{n}{2}\times(n-1)}{6})+(\frac{n}{2})^2$$

$$=\frac{2(n-2)n(n-1)+3n}{12}$$

$$=\frac{n(2n(n-2)(n-1)+3n)}{12}$$

$$=\frac{n(2n^2-3n+4)}{12}$$

解題評註：

這題主要目的是要同學由觀察的過程當中，找出規律來，並求出其和。而在觀察部分，同學要善用一些表格來處理，比較不會數錯，也不至於太辛苦。求和部分則要需要會一些平方和公式，否則可能無法算到最後步驟。

問題編號 3803

如右圖：有 10 個不同的自然數，已知，兩個箭頭所指同一個數等於兩個位於箭頭始端的數之和。

$$\begin{array}{cccccccc}
a & \to & b & \to & c & \to & d \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & e & \to & f & \to & g \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & h & \to & j \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & i
\end{array}$$

例如 $b\;=a+e$。試求 d 的最小值。

參考解答：

應知

$b=a+e,f=e+h,j=h+i\therefore c=b+f=a+h+2e$

$g=f+j=e+i+2h,d=c+g=a+i+3e+3h$

欲使 d 最小，取

$e=1,h=2\Rightarrow d=9+a+i$

$a+i=3+4=4+3$代入不合

$a+i=3+5=5+3$代入不合

$a+i=4+5=5+4=3+6=6+3$代入不合

$a+i=4+6=6+4=3+7=7+3$代入不合

$a+i=[5+6=6+5]$代入不合

$a+i=4+7=7+4\Rightarrow d=20$3

$(a,e,h,i)=(6,1,3,2)$亦可

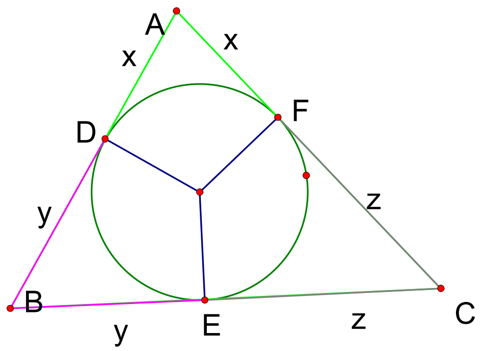
問題編號 3804

請求出合下列條件的所有三角形。

（全等的三角形只計算一次）

(1)這個三角形的邊長均為整數；

(2)這個三角形的內切圓半徑為 2。



參考解答：

$\Delta=\sqrt{xyz(x+y+z)}=2s=a+b+c=2(x+y+z)$

$a=y+z, b=z+x, c=x+y$

$\therefore xyz=4(x+y+z)\Rightarrow$ 不妨假設 $x\ge y\ge z$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\le\frac{3}{z^2}\Rightarrow z^2\le 12$

$z=1\Rightarrow xy=4x+4y+4$

$(x-4)(y-4)=20=20\cdot 1=10\cdot 2=5\cdot 4$

$(x,y)=(24,5),(14,6),(9,8)$

$(a,b,c)=(29,25,6),(20,15,7),(17,10,9)$

$z=2\Rightarrow xy=2x+2y+4$

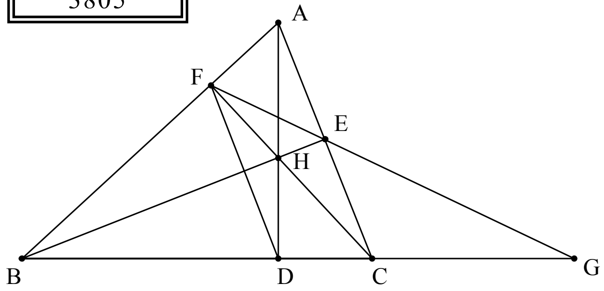
$(x-2)(y-2)=8=8\cdot 1=4\cdot 2$

$(x,y)=(10,3),(6,4)$,

$(a,b,c)=(13,12,5),(10,8,6)$

$z=3\Rightarrow 3xy=4x+4y+12\rightarrow\leftarrow$ 共有五組解

問題編號
3805



如右圖 H 是銳角$\triangle ABC$ 三個高的交點，且 $DF /\!/ AC$，直線 FE 與直線 BC 交於點 G。求證：$\frac{\overline{GE}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{FG}}{\overline{FD}}$ 。

參考解答：

$\because H$ 為垂心

$\therefore \angle EFC=\angle DFC \quad\Rightarrow\frac{\overline{DC}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{FD}}{\overline{FG}}\quad\cdots(1)$

$\because\ \overleftrightarrow{DF}\ /\!/\ \overleftrightarrow{AC}\quad\therefore\ \frac{\overline{DC}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{FE}}{\overline{EG}}\quad\cdots(2)$

由$(1)(2)\Rightarrow\frac{\overline{GE}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{FG}}{\overline{FD}}$

解題重點：

利用對垂心之理解，配合內角平分線定理導出 $\frac{\overline{DC}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{FD}}{\overline{FG}}$，再利用平行截線段定理得 $\frac{\overline{DC}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{FE}}{\overline{EG}}$，本題即得証。