

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \text{ — 費瑞和 (Farey Sum)}$$

解比率問題的妙用

林錫麟¹ 劉祥通^{2*}

¹嘉義縣協同高級中學

²國立嘉義大學 數學教育所

壹、引言

面對中小學學生在分數四則運算學習過程中，任教的數學教師常會在學生分數運算練習時，發現很多奇形怪狀的錯誤運算類型。特別是當教完分數的乘法，學生習得分數乘法算則是直接以分子乘分子、分母乘分母的方式對應相乘而得到分數乘積之後，再碰到分數相加的計算時，有些學生便自然地以此乘法算則套用於分數加法上，使用分母加分母、分子加分子的方式對應相加而得出分數之和。例如：

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{4+3} = \frac{4}{7}$$

這類既可笑又好氣的典型錯誤計算方式。

然而，這種分子加分子，分母加分母的結果所得分數並非毫無意義。例如：

小威參加三對三籃球鬥牛賽，昨天的比賽戰績在五次投籃中進了三球，而今天的比賽在六次投籃中進了兩球。試問兩天比賽下來的戰績成果總進球率為何？

答：第一天的進球率是 $\frac{3}{5}$ ，第二天的

進球率是 $\frac{2}{6}$ 。由於兩天比賽下來共投籃

$5+6=11$ 次，投進的球數是 $3+2=5$ 球，因此兩天的總進球率就相當於將這兩天進球率的分母加分母($5+6$)，分子加分子($3+2$)而

得出總進球率為 $\frac{5}{11}$ 的結果。但是，值得注意的是在解題運算過程中不能以分數加法

意的是在解題運算過程中不能以分數加法

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{5+6} = \frac{5}{11}$$

球率的解法，雖然獲得的結果一樣都是

$\frac{5}{11}$ ，卻也不能因此而誤用了分數加法運

算。

筆者為了呈現上題的分母與分子的對應相加確有存在意義，也兼顧及分數加法的原有算則，為避免混淆，另外引進一

個新的加號 $\oplus$ ，並且定義 $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ 用

來描述與上題同構的題目類型的解題程序。

這樣的算則並非毫無根據，在數學歷史上，確實就有這麼一號人物—英國地質學家的費瑞(John Farey, 1766-1826)，他

* 為本文通訊作者

特別提出 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 以及 $\frac{a+c}{b+d}$ 三個數的數列

關係。我們知道 $\frac{a+c}{b+d}$ 並非 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的分數

和，因此，後人為了區別起見，特別將 $\frac{a+c}{b+d}$

稱為 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的 Farey Sum(費瑞和)。不妨，

我們就以 $\oplus$ 來代表「費瑞和」的符號，並且定義費瑞和的運算法則為：

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}。$$

貳、費瑞和其應用

費瑞和以及費瑞和的比率問題及應用在 Mihaila(2004)，Nind(2004)的研究已有相當論述與貢獻，作者拜讀之後，心有所感。不揣淺陋擬提出一些改良並試圖擴大其應用範圍，期能將費瑞和的方法變成更簡捷更有效，並將適用的問題增多增廣。職是以下將分為四個段落分別加以闡釋：

一、「費瑞和」(Farey Sum)

二、費瑞和的應用

三、費瑞和解題改良法

四、費瑞和的擴大應用

其中的一、「費瑞和」(Farey Sum)與二、費瑞和的應用兩段是摘自 Mihaila(2004)的論述，三與四段是作者針對 Mihaila，Nind(2004)的論述提出的個人使用費瑞和解題所改良或延伸的新方法，再以費瑞和及其數列作為解題工具，探索中

學階段讓學生十分困擾的混合型比率問題以及分數大小比較問題作為擴大應用範圍，而從中發現費瑞和的特殊妙用。

一、「費瑞和」(Farey Sum)

什麼是「費瑞和」？當給定兩個分數 $\frac{a}{b}$

和 $\frac{c}{d}$ ， a 、 b 、 c 、 d 都是自然數，則我們稱

分數 $\frac{a+c}{b+d}$ 是 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的「費瑞和」，並排列

此三項 $\frac{a}{b}$ ， $\frac{a+c}{b+d}$ ， $\frac{c}{d}$ 稱為「費瑞數列」

(Farey Sequence)。例如： $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{3}{5}$ 的費瑞和

$$\frac{1}{3} \oplus \frac{3}{5} = \frac{1+3}{3+5} = \frac{4}{8}。假如 \frac{a}{b} < \frac{c}{d}，顯然費瑞$$

和的大小介於原兩分數之間，即費瑞數列

依大小排序為： $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ 。Farey

在 1816 年首次發表了這個序列性質，只是當時他並沒有加以證明(Nind，2004)。我們先以直觀的例子來說明，例如：A 組 3

個人可享用 1 塊大餅，B 組 5 個人可享用 3 塊大餅，若兩組合併 8 個人共有 4 塊大

餅可吃；原本 B 組每人平均 $\frac{3}{5}$ 比 A 組的 $\frac{1}{3}$

吃得多，兩組合併之後，B 組的人會感覺吃虧了，A 組的人感覺比原來分的多，即合併之後的情況介於 A、B 之間。以數學式子來說明，便是：

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

$$\Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow ad + cd < bc + cd$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(a+c)}{d(b+d)} < \frac{c(b+d)}{d(b+d)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

$$\text{同理亦可證明 } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}。$$

而我們又可觀察到

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{\frac{a}{b} \times b + \frac{c}{d} \times d}{b+d}, \text{說明費瑞和可以視為}$$

「前項 $\frac{a}{b}$ 」與「後項 $\frac{c}{d}$ 」依權數 b 與 d 加

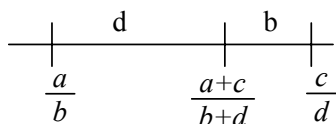
權混合計算的結果。費瑞和 $\frac{a+c}{b+d}$ 還可以看

成是「前項 $\frac{a}{b}$ 」與「後項 $\frac{c}{d}$ 」的內分點^{(註}

¹⁾，此內分點將原來的線段 $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}]$ 的長

度分割為 $d:b$ 的兩個分線段比(如下圖)。

分段比證明如下：



$$\text{已知 } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

^{註1} 為方便說明，我們統稱 $\frac{a}{b}$ 為前項(較小量)， $\frac{c}{d}$ 為後項(較大量)，費瑞和 $\frac{a+c}{b+d}$ 為中間項(分點量或混合量)。

$$\frac{\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}}{\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d}} = \frac{\frac{ba+bc-ab-ad}{b(b+d)}}{\frac{bc+dc-ad-dc}{d(b+d)}}$$

$$= \frac{bc-ad}{b} \div \frac{d}{bc-ad} = \frac{d}{b}$$

即得

$$\text{分段比} = (\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}) : (\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d})$$

$$= d:b = \text{後項分母量} : \text{前項分母量}。$$

二、費瑞和的應用

一般在國中課程相關參考書籍或教師課室中通常以代數方法解「雞兔同籠問題」，但筆者利用 $\frac{a}{b}$ ， $\frac{a+c}{b+d}$ ， $\frac{c}{d}$ 所形成的

費瑞數列關係以及三者數線上的分段比概念，以雞兔同籠問題為例，引用 Mihaila(2004)的費瑞解法來作為國中數學混合型比率問題的新解題策略。

問題一：雞兔同籠共 11 隻，合計 28 隻腳。

請問雞兔各幾隻？

(一) 算術解法：

1. $(11 \times 4 - 28) \div 2 = 8$ --雞， $11 - 8 = 3$ --兔。

如果 11 隻都是兔，則共應有 44 隻腳，比實際的腳數多出 $44 - 28 = 16$ 隻腳，這 16 隻腳應從兔子中每隻拿掉兩隻腳，而將有 $16 \div 2 = 8$ 隻被拿掉兩隻腳後只剩下兩隻腳，而這 8 隻就變為兩隻腳的雞。

2. $(28 - 11 \times 2) \div 2 = 3$ --兔， $11 - 3 = 8$ --雞。

如果 11 隻都是雞，則只有 22 隻腳，

實際腳數還剩下 $28 - 22 = 6$ 隻腳，這 6 隻腳應裝回讓每隻雞多加兩隻腳，而讓其中的 $6 \div 2 = 3$ 隻變成四隻腳，而這 3 隻就變成四隻腳的兔子。

(二) 代數解法：設雞有 x 隻，兔有 y 隻

$$\begin{cases} x + y = 11 & \text{①} \\ 2x + 4y = 28 & \text{②} \end{cases}$$

由①②聯立解出 $x=8$ ， $y=3$

答：籠子裡有 8 隻雞，3 隻兔。

(三) Mihaila(2004)的費瑞解法：

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{兔頭}}{\text{兔腳}} = \frac{\text{兔隻數}}{4 \times \text{兔隻數}} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{c}{d} = \frac{\text{雞頭}}{\text{雞腳}} = \frac{\text{雞隻數}}{2 \times \text{雞隻數}} = \frac{1}{2},$$

雞兔同籠混合後的 $\frac{\text{頭數}}{\text{腳數}}$

$$= \frac{\text{雞} + \text{兔隻數}}{4 \times \text{兔隻數} + 2 \times \text{雞隻數}}$$

$$= \frac{11}{28} = \frac{a+c}{b+d}.$$

兔 d 混合 b 雞

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{兔頭}}{\text{兔腳}} = \frac{1}{4} \quad \frac{11}{28} = \frac{a+c}{b+d} \quad \frac{c}{d} = \frac{\text{雞頭}}{\text{雞腳}} = \frac{1}{2}$$

$d:b = \text{雞腳} : \text{兔腳}$

$$= \left(\frac{11}{28} - \frac{1}{4} \right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{11}{28} \right)$$

$$= \frac{4}{28} : \frac{3}{28} = 4 : 3 \quad \text{③}$$

$$\text{所以 雞腳數} = 28 \times \frac{4}{7} = 16$$

則 雞頭數 $16 \div 2 = 8$

$$\text{兔腳數} = 28 \times \frac{3}{7} = 12$$

$$\text{則 兔頭數 } 12 \div 4 = 3$$

答：籠子裡有 8 隻雞，3 隻兔。

(四) 解題分析：

1. 代數解題的關鍵式是列代數式①與②，解題的途徑是透過假設未知數列出代數式①與②，然後用消去法解出未知數。影響代數解題的主要因素是能否適當地假設未知數並依題意列出正確適當的方程組。

2. 費瑞解的關鍵算式是分段求比的算式③，解題的途徑是列出前後兩項與中間混合項的三個比率量，並排列出費瑞數列，再利用算式③計算得出分段比，然後求出解答。影響費瑞解題的主要因素是能否找出前後項比率量與中間項混合比率量以及能否善用分段比的算式。

3. 代數解文字題的四個步驟為一般學生所熟悉，是為假設未知數→列出方程式→求解未知數→答案檢驗。而由前述Mihaila(2004)的費瑞解題過程為例，我們可分析得出費瑞解題的四個步驟為找出前後項比率量與中間項混合比率量

$$(\text{前項} = \frac{a}{b} = \frac{\text{兔頭}}{\text{兔腳}} = \frac{1}{4}, \text{後項} = \frac{c}{d})$$

$$= \frac{\text{雞頭}}{\text{雞腳}} = \frac{1}{2}, \text{中間項} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{\text{頭數}}{\text{雞腳}}$$

$$= \frac{11}{28}) \rightarrow \text{排列費瑞數列分點數線圖} (\frac{a}{b}$$

$$= \frac{1}{4} \text{-----} \frac{a+c}{b+d} = \frac{11}{28} \text{-----} \frac{c}{d} = \frac{1}{2}) \rightarrow$$

計算分段比($d:b$ =雞腳：兔腳= $(\frac{11}{28}-$

$$\frac{1}{4}) : (\frac{1}{2} - \frac{11}{28}) = \frac{4}{28} : \frac{3}{28} = 4 : 3)$$

並求出答案→答案檢驗。

- 4.使用費瑞解題策略最需要注意的是分段比的結果 $d:b$ 所對應的意義。其中 d 是對應費瑞數列 $\frac{1}{4}, \frac{11}{28}, \frac{1}{2}$ 中後項 $\frac{1}{2}$ 的分母量，也就是由 2 所代表的 2 倍於雞頭的雞腳數量， b 是對應費瑞數列前項 $\frac{1}{4}$ 的分母量，即是由 4 所代表的 4 倍於兔頭的兔腳數量。因為後項的 $\frac{1}{2}$ 是雞頭與雞腳的比值 $\frac{c}{d}$ ，所以 d 不一定就等於 2；同理， b 也不一定就等於 4，因此 $d:b$ 不一定會等於 2:4。而需經分段比算法得出 $d:b=4:3$ =雞腳數：兔腳數。

- 5.採用費瑞解題策略時，因為分段比計算所得的 $d:b$ =後項分母量：前項分母量，因此，若設定前後項比率量時，優先選擇將題目的求解量置於比率量的分母，便能更快求出答案。此為費瑞解題法的一項重要技巧發現。

三、費瑞解題改良新法

筆者以前述雞兔同籠問題為例，提出針對 Mihaila 的改良式費瑞解法，改將求解量的頭數置於前後項比率量的分母，直接關聯於

分段比的分母量，提供解題時更有效的策略。

問題一：雞兔同籠共 11 隻，合計 28 隻腳。請問雞兔各幾隻？

新解法：

- 1.決定前後項比率量與中間項混合比率量：求解目標是雞兔各幾隻，因此選擇設定的前後項是以頭數為分母、腳數作分子的比率量。(註 2)

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{雞腳數}}{\text{雞頭數}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{c}{d} = \frac{\text{兔腳數}}{\text{兔頭數}} = \frac{4}{1},$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{\text{總腳數}}{\text{總頭數}} = \frac{28}{11}$$

2.排列費瑞數列分點數線圖

兔	d	混合	b	雞
----------*				
$\frac{a}{b} = \frac{\text{雞腳數}}{\text{雞頭數}} = \frac{2}{1}$	$\frac{a+c}{b+d} = \frac{\text{總腳數}}{\text{總頭數}} = \frac{28}{11}$		$\frac{c}{d} = \frac{\text{兔腳數}}{\text{兔頭數}} = \frac{4}{1}$	

3.計算分段比並求出答案

$$d:b = \text{兔頭數} : \text{雞頭數}$$

$$= (\frac{28}{11} - \frac{2}{1}) : (\frac{4}{1} - \frac{28}{11}) = \frac{6}{11} : \frac{16}{11} = 3 : 8$$

$$3+8=11,$$

所以：籠子裡有 3 隻兔子，8 隻雞。----答

註 2 Mihaila, I.(2004)在使用費瑞和解雞兔同籠

問題時，所選用的前後項比率量是：兔頭數/兔腳數=1/4，雞頭數/雞腳數=1/2；所求得分段比 $d:b$ =雞腳數：兔腳數，再利用腳數比例求出頭數各幾何。改良之後將前後項取為倒數量，則可一舉求出兔與雞的頭數比。

四、費瑞和的擴大應用

除了雞兔同籠問題，我們也發現費瑞和對於濃密度合金與混合溶液、分段速率等混合型比率問題以及分數的大小比較問題都特具妙用。茲分述如下：

(一) 濃密度問題

濃密度問題一直是國小高年級到國中學生頭痛的問題，無論用不用代數法，解題的瓶頸始終難以克服，費瑞和的解法無疑提供一個不需代數、計算簡單、解題策略明確的老少咸宜的好方法。

問題二：一頂金銀合金的皇冠重 300 公克且比重為 15 公克/立方公分。已知純金比重 19.2 公克/立方公分，純銀比重 10.5 公克/立方公分。問皇冠中的黃金重若干？

1.問題二的費瑞和解法：

銀	合金	金

$\frac{a}{b} = 10.5 \frac{\text{公克}}{\text{立方公分}}$	15	$19.2 \frac{\text{公克}}{\text{立方公分}} = \frac{c}{d}$

$$(15-10.5):(19.2-15)=4.5:4.2$$

=金的體積(立方公分)：銀的體積(立方公分)

$$\text{總體積}=300 \div 15=20(\text{立方公分})$$

$$\text{黃金體積}=20 \times \frac{4.5}{4.5+4.2}$$

$$=10.345(\text{立方公分})$$

$$\text{黃金重量}=19.2 \times 10.345$$

$$=198.62(\text{公克})\text{-----答}$$

問題三：甲葡萄糖溶液濃度 2%，乙葡萄糖溶液濃度 5%。若將甲乙混合成濃度 3%的葡萄糖溶液 1200c.c.，問甲、乙各需取用多少 c.c.？

2.問題三的費瑞和解法：

甲溶液	混合液合金	乙溶液

2%	3%	$5\% = \frac{\text{葡萄糖}}{\text{葡萄糖溶液}}$

$$\frac{3\%-2\%}{5\%-3\%} = \frac{3-2}{5-3} = \frac{1}{2} = \frac{\text{乙溶液量}}{\text{甲溶液量}}$$

$$\text{甲需 } 1200 \times \frac{2}{3} = 800(\text{c.c.}),$$

$$\text{乙需 } 1200 \times \frac{1}{3} = 400(\text{c.c.})\text{-----答}$$

3.解題分析：

(1)問題二代數解題的未知數假設可根據求解需要，以黃金重量為 x 、銀子重量為 y 。但列方程組就不容易了，利用重量和列出 $x+y=300$ ，再利用體積和列出方程式： $\frac{x}{19} + \frac{y}{10.5} = \frac{300}{15}$ ，而接下的計算比起費瑞解法的 $(15-10.5):(19.2-15)=4.5:4.2$ 來得複雜許多，可見以此題為例費瑞和解法比起代數法解題確有簡易妙用之處。

(2)問題二所求是黃金的重量，如果我們取用原解法中比重的倒數為前後項，則費瑞數列變為： $\frac{1}{19.2}, \frac{1}{15}, \frac{1}{10.5}$ 。雖然可以一舉求出重量比，而不需要先求出體積再換算成重量，但如此一來使

計算更為繁複，因此依然採用比重為前後項為佳。

- (3) 本題說明在選擇前後項的比率量時，應同時考慮要將求解量置於分母的策略或是否造成計算上的困擾，取捨之後成為最佳策略。
- (4) 綜合問題二與問題三的費瑞和解法中知道，學童即使不懂初等代數，仍然能夠輕鬆算出這種原本傷腦筋的濃密度混合問題。
- (5) 當然，我們也必須了解捨棄傳統代數解題方式則應有費瑞數列的大小關係以及分段比所得的意義等先備知識，而對這些知識的理解亦需依賴初等代數的工具。
- (6) 費瑞法的算式求解思考方式與代數法直接以題意來列式的方式大為不同。針對混合型比率問題，要能有效正確地使用代數的列式必須奠基於兩個重要基礎，一是建立在對各種不同的混合比率定義的深入理解，了解什麼是濃度、合金、分段速率等的涵義；二是能對混合情境列出數學關係式。相較之下，使用代數解所需具備的基礎條件要高階於使用費瑞解的工具。

(二) 速率問題

問題四：甲地到乙地，去程速率 50 公里/小時，回程速率 90 公里/小時。請問來回平均速率多少？

1. 代數與費瑞和綜合解題：設平均速率 x 公里/小時

回程	平均	去程

$\frac{1}{90} \frac{\text{小時}}{\text{公里}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{50} \frac{\text{小時}}{\text{公里}}$

因為來回路程等長，所以

$$\frac{\text{去程里數}}{\text{回程里數}} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{90}}{\frac{1}{50} - \frac{1}{x}} = 1,$$

$$\text{得 } \frac{1}{x} - \frac{1}{90} = \frac{1}{50} - \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{450}{7} = 64.4 \text{ (公里/小時)} \text{-----答}$$

2. 解題解析：

本題嘗試結合代數方法與費瑞法，先假設平均速率為 x 公里/小時。因為來回里程都是一樣，而分段比=後項分母量：前項分母量，所以考慮將分段比結果設定為 1:1=去程里數：回程里數。因此，前後項的分母必須為公里單位，而速率的單位是 $\frac{\text{公里}}{\text{小時}}$ ，故取速率的倒數而得費瑞數列： $\frac{1}{90}$ 小時/公里， $\frac{1}{x}$ 小時/公里， $\frac{1}{50}$ 小時/公里，再以分段比算式求出未知數 x 。

(三) 分數比較大小問題

在分數比較大小的問題中，例如 $\frac{2}{9}$ 與

$\frac{4}{17}$ 哪一個比較大？Nind(2004)使用費瑞和

的數列的概念來說明：因為 $\frac{1}{5} < \frac{2}{9} < \frac{1}{4}$ ，且

$\frac{3}{13} < \frac{4}{17} < \frac{1}{4}$ ，又 $\frac{1}{5} < \frac{4}{18} = \frac{2}{9} < \frac{3}{13}$ ，所以得出

$\frac{2}{9} < \frac{4}{17}$ 的結論。從這個過程觀察，費瑞和

的方法用在分數大小比較並不是一個有效的策略。同時 Nind(2004)也特別提醒，如果在小學階段介紹使用費瑞方法來比較分數大小，還甚至會導致反效果，因為學童會因此混淆或誤用了分數加法算則。

對於分數比較大小，費瑞法並不實用，但對於分數比較大小中的一個問題：「一個分數將分子與分母同時加上某一個正數後會變大或是變小？」費瑞法卻變得實用又美觀。這個問題一般學生使用的策略通常是真假分數各舉一例來做歸納與宣稱，而具備數感(number sense)的學生會知道使用參考點(benchmark)的比較方法，但多數的人則是知其然卻不知其所以然。筆者發現費瑞和的方法正是提供了一個以數線為空間的幾何理解模式，使分數比較問題具象化為數字的移動關係，讓比較大小問題變得簡單又生動有趣。

問題五：比較 $\frac{111}{123}, \frac{211}{223}, \frac{311}{323}$ 的大小。

問題六：比較 $\frac{123}{119}, \frac{153}{149}, \frac{183}{179}$ 的大小。

1. 以 1 為參考點的解法

(1) 問題五：

$$\frac{111}{123} = 1 - \frac{12}{123}, \frac{211}{223} = 1 - \frac{12}{223}, \frac{311}{323} = 1 - \frac{12}{323}$$

又因為 $\frac{12}{123} > \frac{12}{223} > \frac{12}{323}$ ，

$$\text{所以 } \frac{111}{123} < \frac{211}{223} < \frac{311}{323}$$

(2) 問題六：

$$\frac{123}{119} = 1 + \frac{4}{119}, \frac{153}{149} = 1 + \frac{4}{149}, \frac{183}{179} = 1 + \frac{4}{179}$$

又因為 $\frac{4}{119} > \frac{4}{149} > \frac{4}{179}$ ，

$$\text{所以 } \frac{123}{119} > \frac{153}{149} > \frac{183}{179}$$

2. 幾何觀點的費瑞和解法：

(1) 問題五： $\frac{111}{123} < 1$ ，為一真分數，我們

可以在數線上點出其相對位置為

$$\frac{111}{123} * \text{-----} * 1 = \frac{100}{100} \text{ (分子與分母逐次加 100)}$$

根據費瑞和及其數列關係

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

$$\frac{111}{123} < \frac{100}{100} \Rightarrow \frac{111}{123} < \frac{111+100}{123+100} = \frac{211}{223} < \frac{100}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{111}{123} < \frac{211}{223} < \frac{211+100}{223+100} = \frac{311}{323} < \frac{100}{100}$$

$$\text{即得 } \frac{111}{123} < \frac{211}{223} < \frac{311}{323} < 1。$$

我們可以進一步推論出一般公式：

$$\text{若 } \frac{a}{b} < 1, x, y \in R, y > x > 0$$

且 $y - r = x, r > 0$ ，則

$$\frac{a}{b} * \text{-----} * 1 = \frac{x}{x} = \frac{r}{r} \text{ (真分數位於 1 的左方)}$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} < \frac{x}{x} &\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x} < \frac{x}{x} \\ \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x} &= \frac{a+y-r}{b+y-r} < \frac{r}{r} = \frac{x}{x} = 1 \\ \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x} &< \frac{a+y-r+r}{b+y-r+r} = \frac{a+y}{b+y} < 1 \\ \text{即 } \frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x} &< \frac{a+y}{b+y} < 1\end{aligned}$$

由此得知：分子分母同時加上任意正實數的真分數，加得愈多，則此新分數就會愈向右移而愈靠近 1。

(2) 問題六： $\frac{123}{119} > 1$ ，為一假分數，我們

可以在數線上點出其相對位置為

$$1 = \frac{30}{30} * \dots * \frac{123}{119} \text{ (分子與分母逐次加 30)}$$

根據費瑞和及其數列關係

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} &< \frac{c}{d} \\ \frac{30}{30} < \frac{123}{119} &\Rightarrow \frac{30}{30} < \frac{30+123}{30+119} = \frac{153}{149} < \frac{123}{119} \\ \Rightarrow \frac{30}{30} < \frac{30+153}{30+149} &= \frac{183}{179} < \frac{153}{149} < \frac{123}{119} \\ \text{即得 } 1 < \frac{183}{179} &< \frac{153}{149} < \frac{123}{119}.\end{aligned}$$

我們可以進一步推論出一般公式：

$$\text{若 } \frac{a}{b} > 1, \quad x, y \in R, y > x > 0, x, y$$

且 $y - r = x, r > 0$ ，則

$$1 = \frac{x}{x} = \frac{r}{r} * \dots * \frac{a}{b} \text{ (假分數位於 1 的右方)}$$

$$\begin{aligned}\frac{x}{x} < \frac{a}{b} &\Rightarrow \frac{x}{x} < \frac{x+a}{x+b} < \frac{a}{b} \\ \Rightarrow 1 = \frac{x}{x} = \frac{r}{r} &< \frac{y-r+a}{y-r+b} = \frac{x+a}{x+b} < \frac{a}{b} \\ \Rightarrow 1 < \frac{y-r+r+a}{y-r+r+b} &= \frac{y+a}{y+b} < \frac{x+a}{x+b} < \frac{a}{b} \\ \text{即 } 1 < \frac{y+a}{y+b} &< \frac{x+a}{x+b} < \frac{a}{b}\end{aligned}$$

由此得知：分子分母同時加上任意正實數的假分數，加得愈多，則此新分數就會愈向左移而愈靠近 1。

3. 解題分析

(1) 以 1 為參考點的解法是一個非常有效的方法，因為這些分數的分子與分母同加一正數，所以其分子分母之差都會一樣。若是真分數就以 1 減之，比較與 1 的差距，這些差距的分數其分子都會相同，很容易比較，而差距愈小者，原真分數愈大。若是假分數，則可減去 1，所餘分數的分子也會相同，餘分數愈大者則原分數就也愈大。

(2) 費瑞和觀點提供一個幾何思考模型，透過數線的圖像思考。如果是真分數 (< 1)，則 1 位於其右，隨著所加的數愈大，新分數就愈向右邊的 1 靠近，數字也隨之愈大。如果是假分數 (> 1)，則 1 位於其左，隨著所加的數愈大，新分數就愈向左邊的 1 靠近，數字也隨之愈小。若 a, b, x, y 均為

正實數且 $b > a > 0, y > x > 0$ ，則 $\frac{a}{b}$ 是真

分數， $\frac{b}{a}$ 是假分數，我們可以用一個

數線圖來表示相對的分數大小關係：

$$\text{-----}+ \text{-----} \rightarrow$$

$$(\text{真分數}) \frac{a}{b} \rightarrow \frac{a+x}{b+x} \rightarrow \frac{a+y}{b+y} \rightarrow 1 \leftarrow \frac{b+y}{a+y} \leftarrow \frac{b+x}{a+x} \leftarrow \frac{b}{a} (\text{假分數})$$

因此，費瑞和的圖像思考提供一種比參考點的數量比較思考更為生動而直觀的方法。

參、結語

利用費瑞和及其費瑞數列關係，可以在不依賴代數解法下解有關混合型的比率問題。混合型的比率問題諸如，雞兔同籠後的頭數與腳數之比是混合後的比率，金銀合金後的比重也是混合的比率，3%葡萄糖是混合後的溶液比率，來回兩速率的平均速率是來回兩速率的混合比率。混合後的比率是將混合前之前後項比率量以某一比值關係混合而成的，其大小必然位於原來兩比率之間；而費瑞和位於前後項之間，

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \text{ 且費瑞數列形成一}$$

種特別的比例關係，

$$\left(\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}\right) : \left(\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d}\right) = d : b。 \text{基於這種特殊}$$

的比例關係，對於混合型的比率問題，都可以用費瑞和的數列比例關係求解。不但如此，費瑞和的解法較一般用以解混合型比率問題之代數法所呈現的計算較為簡易，具有數學知識低階以及解題結構清晰的優勢，針對混合型比率問題，可稱實具神奇妙用。

費瑞和與其數列之比例不但在數量與代數問題上成為解題策略的簡易工具，同時也提供了一種幾何的解題思維。透過這種在一維空間上的數列排列關係，加上實數的稠密特性，使真分數與假分數的分母分子各加相同正數後變大或變小的判斷，由原本的數量運算轉換成數線上點座標的移動圖像，這是運用費瑞和永遠位在前後項之間的連續比較所形成的動態幾何效果所得出，如果運用極限概念來看，

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a+x}{b+x} = 1, \text{ 真分數漸增趨近於右方的}$$

1，假分數則是漸減趨近於左邊的1，顯現費瑞和方法生動活潑的幾何屬性。

肆、參考文獻

- Mihaila, I.(2004). Farey Sums and Understanding Ratios. *Mathematics Teacher*, 98(3), 158-162.
- Nind, Andrew(2004). Away with the Fareys. *Mathematics Teaching*, 188, 46-47.