

中學生通訊解題第三十七期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
3701

$$A=\{-2,-1,0,1,2,3\}, B=\{1,2,3,4,5\}$$

$f: A \rightarrow B$ 滿足 $x+f(x)+xf(x)=2k+1, k$ 為整數【表示為奇數】；其中 x 為 $-2,-1,0,1,2,3$ 中之一數，而 $f(x)=1,2,3,4,5$ 中之一數，則滿足此種對應之函數 f 共有多少種？

參考解答：

『奇偶性』奇數+奇數=偶數，

奇數+偶數=奇數；當

$$x = -2 \Rightarrow (-2) + f(-2) + (-2)f(-2)$$

$$= (-2)[1 + f(-2)] + f(-2)$$

若為奇數，則 $f(-2)$ 必為奇數 $\therefore f$

$(-2)=1,3,5$ 中之一數，有 3 種可能

$$x = -1 \Rightarrow (-1) + f(-1) + (-1)f(-1) = -1 \text{ 必為奇數}$$

$\therefore f(-1)=1,2,3,4,5$ 中之一數，有 5

種可能

$$x = 0 \Rightarrow (0) + f(0) + (0)f(0) = f(0) \text{ 若為奇數，則}$$

$f(0)$ 必為奇數 $\therefore f(0)=1,3,5$ 中之一數，有 3 種可能

$$x = 1 \Rightarrow (1) + f(1) + (1)f(1) = 2f(1) + 1 \text{ 必為奇數}$$

$\therefore f(1)=1,2,3,4,5$ 中之一數，有 5 種可能

$$x = 2 \Rightarrow (2) + f(2) + (2)f(2) = (2)[1 + f(2)] + f(2)$$

若為奇數，則 $f(2)$ 必為奇數

$\therefore f(2)=1,3,5$ 中之一數，有 3 種可

$$x = 3 \Rightarrow (3) + f(3) + (3)f(3) = 4f(3) + 3 \text{ 必為}$$

奇數

$\therefore f(3)=1,2,3,4,5$ 中之一數，有 5

種可能

$\therefore$ 共有 $(3)(5)(3)(5)(3)(5)=3375$ 種

可能

問題編號
3702

有 187 個整數，其和與積都為 188，

求這 187 個整數的絕對值的和。

參考解答：

(1) 由 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{187} = 188$ ，可知其中奇數有偶數個。

(2) 由 $x_1 x_2 x_3 \cdots x_{187} = 188$ ，可知其中負數有偶數個。

而因為 $188 = 1 \times 188$ 或 $188 = 4 \times 47$ 或 $2 \times 2 \times 47$ 或 2×94 ，若選擇其中兩個數 x_i 及 x_j 的值为 ± 2 ，或一個為 ± 2 ，另一個為 ± 94 ，則都會導致奇數的個數為奇數個。所以，在所有的 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{187}$ 中只可能有一個偶數，而，唯一的偶數只可能是 ± 4 或 ± 188 。而其餘的 x_i 都只能是 1 或 -1 。

若那個唯一的偶數為 188，則由(2)可知其餘的數都只能是 1 或 -1 ，由(1)易導出其餘的 186 個數 1 及 -1 各佔一半，即

各有 93 個，才能使和為 188。但，93 個 -1 的積為負數，與(2)的結果矛盾。若唯一的偶數為 -188，則又違背了(1)「和為 188」的條件。故此唯一的偶數的絕對值為 4。

由 $188 = |4 \times 47 \times (\pm) \times (\pm) \times \cdots \times (\pm 1)|$ ，絕對值符號中的 ± 1 共有 185 個，所以所求的絕對值的和為 $4 + 47 + 185 = 236$ 。事實上，上列的成績的絕對值中，我們可以選擇 161 個 1 及 24 個 -1，一個 4 及一個 47，是滿足條件的解。

解題評註：

本題的本質屬於奇偶分析的問題，在初中階段的數論中，是一個常用的基本觀念。在破題時如果能掌握「只有一個偶數」的關鍵，那麼解題就可以輕鬆得多了。許多同學都沒有抓住這個要領，所以就會解得很繁，就可能導致小的解題缺陷，而未能得到滿分，即便是有些同學得到了滿分，但作法上也還是比較「暴力」，也希望能參考我們提供的解法。通訊解題的功能之一就是透過網路把比較特殊或優良的方法提供給同學，讓同學將這些方法與自己的解法作一個比較，而促成某些進步。

問題編號
3703

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 \end{cases}$$

參考解答：

利用平方和公式得 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ 利用

立方和公式得 $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

再令 $x + y = \alpha, xy = \beta$ (代換法)

$$\begin{cases} x + y = \alpha = 4 \\ (\alpha^2 - 2\beta)(\alpha^3 - 3\alpha\beta) = 280 \end{cases}$$

$$(8 - \beta)(16 - 3\beta) = 35 \Rightarrow 3\beta^2 - 4\beta + 93 = 0$$

$$(3\beta - 31)(\beta - 3) = 0 \Rightarrow \beta = 3 \vee \beta = \frac{31}{3}$$

(1) 利用根與係數

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (3, 1) \vee (1, 3)$$

(2)

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = \frac{31}{3} \end{cases} \Rightarrow t^2 - 4t + \frac{31}{3} = 0 \Rightarrow 3t^2 - 12t + 31 = 0$$

但是「判別式」

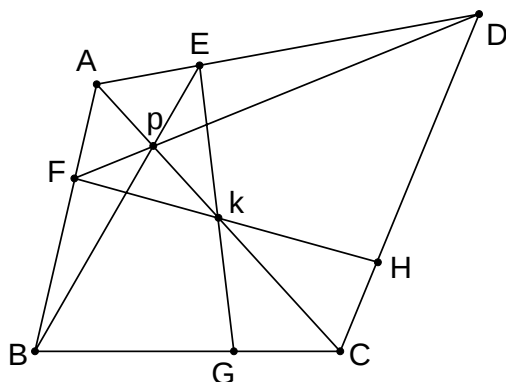
$$(-12)^2 - 4(3)(31) = -228 < 0 \Rightarrow \text{無實數解}$$

或是利用虛數 $i = \sqrt{-1}$ 可以得到二組複數根

$$(x, y) = (2 + \frac{\sqrt{57}}{3}i, 2 - \frac{\sqrt{57}}{3}i) \vee (2 - \frac{\sqrt{57}}{3}i, 2 + \frac{\sqrt{57}}{3}i)$$

問題編號
3704

已知：K 為 $\overline{AC}$ 中點，且 K 在 $\overline{BD}$ 上，P 為 $\overline{AK}$ 上的任一點， $\overline{BP}$ 交 $\overline{AD}$ 於 E， $\overline{DP}$ 交 $\overline{AB}$ 於 F， $\overline{FK}$ 交 $\overline{CD}$ 於 H， $\overline{EK}$ 交 $\overline{BC}$ 於 G。如圖所示，試證： $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$



參考解答：

在 $\triangle DPA$ 中 $\because \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EP}, \overrightarrow{DK}$ 交於 P 點，

由 Ceva 定理知： $\frac{DF}{FP} \times \frac{PK}{KA} \times \frac{AE}{ED} = 1$

在 $\triangle DPC$ 中 $\because \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EP}, \overrightarrow{DK}$ 交於 P 點，

由 Ceva 定理知： $\frac{DF}{FP} \times \frac{PK}{KC} \times \frac{CH}{HD} = 1$

$\therefore AK = KC$

$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{CH}{HD} \Rightarrow \overrightarrow{EH} \parallel \overrightarrow{AC}$

同理 $\overrightarrow{FG} \parallel \overrightarrow{AC} \therefore \overrightarrow{EH} \parallel \overrightarrow{FG}$

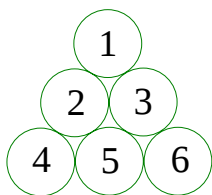
解題重點：

利用對 Ceva 定理之理解，配合平行截

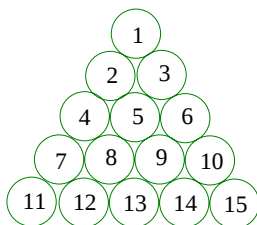
線段定理導出 $\overrightarrow{EH} \parallel \overrightarrow{AC}$ ，再利用對稱性即

可得 $\overrightarrow{EH} \parallel \overrightarrow{FG}$ 。

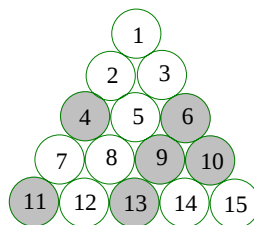
問題編號
3705



圖一



圖二



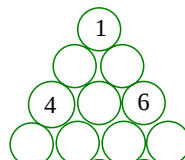
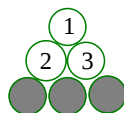
圖三

如上圖（一）（二）（三）均由大小相同的圓緊密相切堆成，將其中的圓均染上黑色或白色，且每球恰染一色，試證明：

- (1) 將圖（一）中編號 4,5,6 的球塗黑，則無論其餘編號的球如何塗，必有同色正三角形（註）
- (2) 將圖（二）中編號 11,13,15 的球塗黑，則其餘編號的球無論如何塗，必有同色正三角形
- (3) 將圖（二）中的球任意塗，必有同色正三角形

（註）如圖（三）編號 4,11,13 或 6,9,10 均為同色，構成正三角形，且其方向與圖（三）的三角形相同，則這兩個三角形都是同色正三角形。

參考解答：



(1) 1, 2, 3 無論哪一個塗黑，都會與最下列

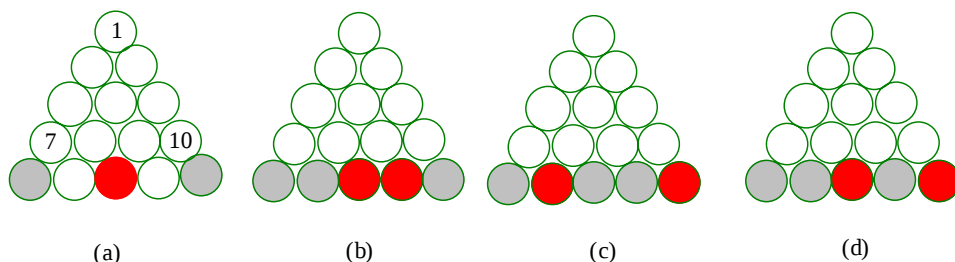
的三個圈中的兩個形成同色正三角形；

2. 若 1, 2, 3 三個都不塗，則此三點字成同色三角形。

(2) 如右圖：取出 1, 4, 6 與 11, 13, 15，則形成與(1)相同

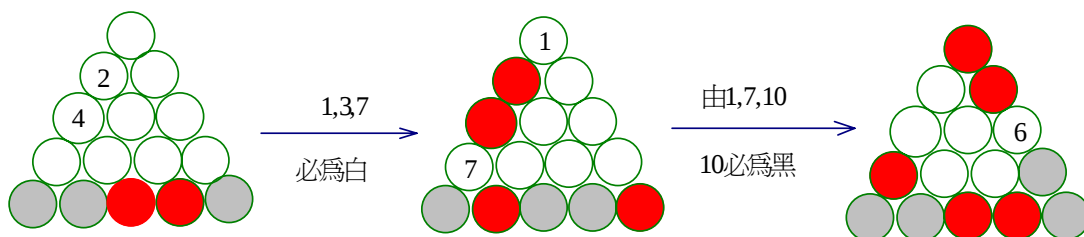
的情形，故必有同色三角形。

(3) 考慮最下面一列，至少有三個同色，不妨假設為黑色，由(1),(2)對稱性，只需討論如下的四種情形：



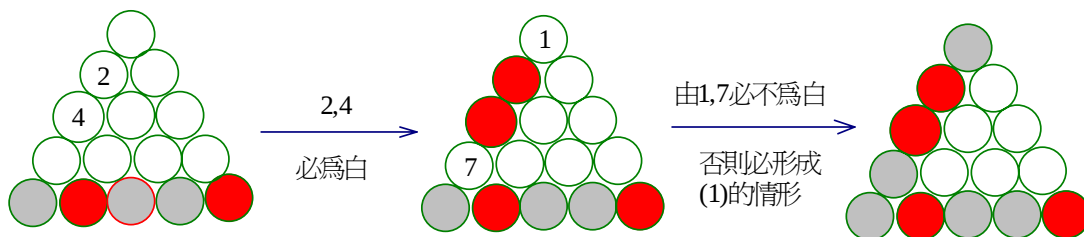
(a) 只考慮 1, 7, 10，則討論方法與(1)同，必有同色正三角形。

(b) 假設不產生同色正三角形，



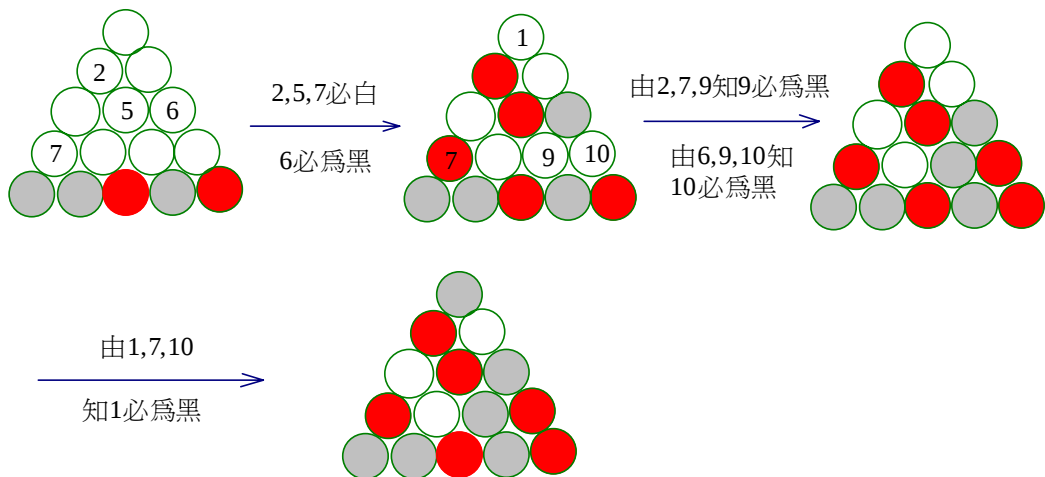
⇒ 無論 6 為黑或白，都將產生(1)的情形，則必有同色正三角形，這表示假設是錯的，所以，一定有同色正三角形。

(c) 假設不產生同色正三角形，



⇒ 1, 2, 4, 7, 11 必形成(b)的情形，故必有同色正三角形。矛盾！

(d) 假設不產生同色正三角形，



⇒ 無論 4 為黑或白，1,2,3,7,11 必形成(1)或(2)的狀況，必有同色正三角形。矛盾！
綜合上面的討論，無論如何塗色，都必產生同色正三角形。

解題評註：

本題解題的重點是分類討論以及反證法，同時，有意識地利用已經得到的結果，可以簡化討論的程序。