

中學生通訊解題第三十六期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
3601

試找出所有滿足下列條件的所有含有十個位數的數的個數。

- (1) 各個位數不相同；
- (2) 可以被 11111 整除。

參考解答：

假設 $A = \overline{abcdefghij}$ ，

其中 $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 且互異。

$\because 11111 \mid A$

且 $a + b + c + d + e + f + g + h + i + j$
 $= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$

所以 $9 \mid A$ ，又因為 $(11111, 9) = 1$

$\Rightarrow 99999 \mid A$

$\Rightarrow \overline{abcdefghij} = \overline{abcde} \times 100000 + \overline{fghij}$
 $= \overline{abcde} \times 99999 + \overline{abcde} + \overline{fghij}$ ，則必有

$99999 \mid \overline{abcde} + \overline{fghij}$ 。

顯然， $\overline{abcde} + \overline{fghij}$ 不可能等於 199998，

否則 $\overline{abcde} = \overline{fghij} = 99999$ ，與位數互異

矛盾。當然更大就更不可能。

所以， $\overline{abcde} + \overline{fghij}$ 只可能等於 99999。

因此，我們有：

$a + f = b + g = c + h = d + i = e + j = 9$ ，也就是說， a 與 f 、 b 與 g 、 c 與 h 、 d 與 i 、 e 與 j ，決定了其中之一，另一個就跟著決定。而且 a 不能為 0，因而只能有 9 個選擇， b 有 8 個選擇， c 有 6 個選擇， d 有 4 個選擇， e 有 2 個選擇。故共有 $9 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 = 3456$ 個合條件的數字。

解題評註：

這個題目是一個只要用基本的整數的性質就可以解出的題目，不需很多的數學知識，但要一點推理的能力。

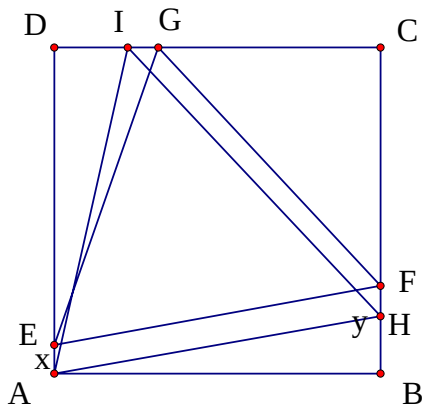
問題編號
3602

請用一張正方形的紙張摺出一個最大的內接正三角形（三角形的頂點在正方形的邊上）。

說明你的摺法並證明這個摺法所摺的正三角形是最大的。

參考解答：

如右圖：



正三角形的面積最大的充要條件為邊長最大。

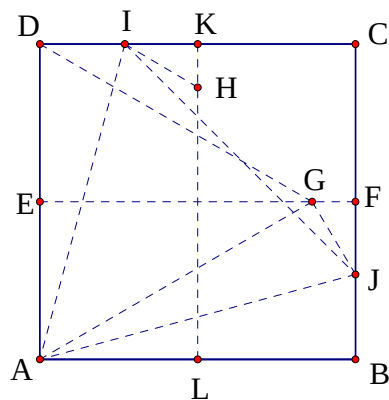
設 $\triangle EFG$ 為正方形 $ABCD$ 的最大內接正三角形，則所有內接正三角的邊長均不超過 EF 。

令 $x = AE$ ， $y = BF$ ，則 $EF^2 = (y - x)^2 + AB^2$ 。

又因為 x, y 均不為負，欲使 EF 最大，則必 $x = 0$ 。否則， EF 不可能最大。這說明了要得到一個正方形的最大內接正三角形，一定要有一個正三角形的頂點落在正方形的頂點上。在這個條件下去決定 y 的取值。

設 $\triangle AHI$ 為所求的最大正三角形，則易知 $\triangle ABH$ 與 $\triangle ADI$ 全等。 $\Rightarrow \angle DAI = \angle HAB = 15^\circ$ 。因此我們只要能將邊 AB 以及 AD 向內折出 15° 即可。

以下是我們的折法：



- (1) 先折出兩條中線 EF 、 KL
- (2) 將 AB 折向 AG ，使 G 落在 EF 上，折痕為 AJ 。
易知 $\angle GAB = 30^\circ$ ，且 $\angle JAB = 15^\circ$ 。
- (3) 同理：可以得到折痕 AI 。
- (4) 再沿 I 、 J 折出一條折痕 IJ ，則 $\triangle AIJ$ 為所求。

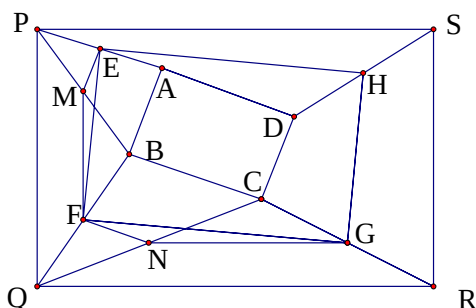
解題評註：

平面摺紙的問題大多是由作圖題轉化而來，而幾何中的作圖題又需要不錯的分析能力。本題前半段的敘述大部分是在作分析的工作，分析完畢，題目大致已經獲得解決了。

問題編號
3603

設矩形 $PQRS$ 的內部有一個與他相似的矩形 $ABCD$ ， E 、 F 、 G 、 H 分別是 $\overline{AP}$ 、 $\overline{BQ}$ 、 $\overline{CR}$ 、 $\overline{DS}$ 的中點，求證： $EFGH$ 與 $PQRS$ 也相似。

參考解答：



如圖：

假設 $\overline{PQ}:\overline{QR}=\overline{AB}:\overline{BC}=1:r$ ，連 $\overline{BP}, \overline{QC}$ ，並分別取其中點 M、N。

$$\because \overline{EM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2r}\overline{BC} = \frac{1}{r}\overline{FN}, \text{ 且 } \overline{EM} \perp \overline{FN}。$$

$$\text{又 } \overline{FM} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{1}{2r}\overline{QR} = \frac{1}{r}\overline{GN}, \text{ 且 } \overline{FM} \perp \overline{GN}。$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle EMF = \angle FNG \Rightarrow \triangle EMF \sim \triangle FNG \\ \Rightarrow \overline{EF} = \frac{1}{r}\overline{FG}, \text{ 且 } \overline{EF} \perp \overline{FG}。 \end{aligned}$$

$$\text{同理, } \overline{EF} = \frac{1}{r}\overline{FH}, \text{ 且 } \overline{EF} \perp \overline{FH}。$$

$\therefore$ 矩形 EFGH $\sim$ 矩形 ABCD $\sim$ 矩形 PQRS。

解題評註：

這個題目是由一個全國數學能力競賽題目改編的，原題是正方形。同學在看完了詳解後，是否可以也試試改寫題目，例如 ABCD 不一定要在 PQRS 內，或者矩形可以變為平行四邊形，或整個問題用三角形來命題，則情形又如何？

問題編號
3604

$$a = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{2003} - \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005}$$

$$, b = \frac{1}{1003} + \frac{1}{1004} + \cdots + \frac{1}{2005},$$

$$c = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} - \frac{1}{2003} - \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005}$$

。試比較 a, b, c 的大小。

參考解答：

(1)

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} - 2 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2004} \right) \\ &= \frac{1}{1003} + \frac{1}{1004} + \cdots + \frac{1}{2005} = b \end{aligned}$$

(2) 可以將 a 寫成

$$\begin{aligned} a &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{2002} - \frac{1}{2003} \right) - \left(\frac{1}{2004} - \frac{1}{2005} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{6} \right) - \left(\frac{1}{20} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{2002 \times 2003} \right) - \left(\frac{1}{2004 \times 2005} \right) \end{aligned}$$

而將 c 寫成

$$\begin{aligned} c &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2002} - \frac{1}{2003} \right) - \left(\frac{1}{2004} - \frac{1}{2005} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{6} \right) - \left(\frac{1}{20} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2002 \times 2003} \right) - \left(\frac{1}{2004 \times 2005} \right) \end{aligned}$$

當然可以明顯地看出 $c > a$ ，所以，
a, b, c 的大小關係為 $c > a = b$ 。

解題評註：

這是一題巧算題。

問題編號 3605

在一個 100×100 的方格紙上的格中任意填入整數，滿足相鄰兩格的數字的差不超過 20。

求證：其中必定存在某數被寫了 3 次。

參考解答：

由這個方陣的左上角的格中開始填入數字，直到右下角。相鄰格中的數字差

不超過 20，則這個方陣數字差的最大可能

為： $20 \times 198 = 3960$

這表示無論如何填數字，最多只有 3961 個相異的數字可填，而 100×100 方陣共有 10000 格，根據鴿籠原理，至少有一

一個數字被填了 $\left\lceil \frac{10000}{3961} \right\rceil + 1 = 3$ 次。

解題評註：

這是一道典型的鴿籠原理的問題，無論同學用直接證法，或反證法，都不能跳脫這個原理。作答的同學不多，只有 7 人，讓人相當意外。

註：此為第三十六期更新版題目解答與評析。

徵 稿

本刊內容以下列七大主題呈現：

- (1). **特載**：專題演講和特約稿。
- (2). **科教論壇**：數學和科學教育論文（原創性的文章）。
- (3). **科學教育介紹**：數學和科學教育研究、計畫、主題或思潮的介紹，以及科教領域書籍的評論。
- (4). **科學知識**：數學、物理、化學、生物、地球科學、環境科學及資訊科學等提供中小學數理教師教學參考之教學材料或新知。
- (5). **科學教室**：數學、物理、化學、生物、地球科學、環境科學及資訊科學等學科之科學課程、教材、教法、評量、教具。
- (6). **活動報導**：政府科學教育資訊以及重要科學教育活動報導。
- (7). **競賽試題**：奧林匹亞競賽、能力競賽、其他測驗與解題活動等。

竭誠歡迎各界惠賜符合發行旨趣之稿件，請作者在投稿時，依照文章屬性選定主題類別，並填寫 **投稿資料表**（請由 <http://www.sec.ntnu.edu.tw/journal/journal.htm> 下載），連同文章送(寄)至本刊編輯室。編輯室收到稿件後，將依照各類文章審查要求送請專家學者審查，其中科教論壇經二位專家審查通過後，始予刊登，科學教育介紹、科學知識、科學教室經一位專家審查通過後，始予刊登。