中學生通訊解題第四十八期題目參考解答與評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
4801

已知 a，b，c 是正實數，滿足 $b+c=la$，$c+a=mb$，$a+b=nc$，其中 l，m，n 均為正整數。試求 $l+m+n$ 所有可能的值。

參考解答：

$a,b,c>0$，$l,m,n\in\mathrm{N}$，

因 $l+m+n=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$ 是一對稱式，不妨假設 $a\geq b\geq c$。

因 $l=\dfrac{b+c}{a}\leq\dfrac{a+a}{a}=2$，

(1) $l=2$，即上述不等式等號成立，其充要條件為 $a=b=c$，故 $l+m+n=6$

(2) $l=1$，$b+c=a$，

$$m=\frac{c+a}{b}=\frac{c+(b+c)}{b}$$
$$=\frac{b+2c}{b}\leq\frac{b+2b}{b}=3$$

① $m=3\Rightarrow\begin{cases}b+c=a\\c+a=3b\end{cases}$

$\Rightarrow a=2c,b=c\Rightarrow l+m+n$
$=1+3+3=7$

② $m=2\Rightarrow\begin{cases}b+c=a\\c+a=2b\end{cases}$

$\Rightarrow a=3c,b=2c\Rightarrow l+m+n$
$=1+2+5=8$

③ $m=1\Rightarrow\begin{cases}b+c=a\\c+a=b\end{cases}$

$\Rightarrow a=b,c=0\Rightarrow$ 不合

因此 $l+m+n$ 所有可能的值為 6 , 7 , 8

解題評注：

本題作答的同學幾乎都抓到要領。

問題編號
4802

一百盞燈分別標上號碼: 1,2,3,...100. 設每盞燈的設計皆是:若原來是關閉的狀態,拉第一下是大亮, 拉第二下是小亮, 拉第三下是關閉.現在這一百盞燈都是關閉的狀態,第一個人把每盞燈都拉一下，第二個人把標號是 2 的倍數的燈都拉一下，第三個人把標號是 3 的倍數的燈都拉一下，依此類推，直至第一百個人把標號是 100 的燈拉一下，試問最後有哪幾盞燈是關閉的狀態？

參考解答：

即觀察這100個數中,哪些數的因數個數是 3 的倍數，利用標準分解式來分組計數。

標準分解式	數(燈的標號)	個數
$2^1 \cdot 3^2(1,5)$	18,90	2
$2^1 \cdot 5^2(1)$	50	1
$2^1 \cdot 7^2(1)$	98	1
$2^2(1,3,5,...,25)$	4,12,20,28,36,44,52,60,68,76,84,92,100	13
$2^3 \cdot 3^2(1)$	72	1
$2^5(1,3)$	32,96	2
$3^1 \cdot 5^2(1)$	75	1
$3^2(1,5,7,11)$	9,45,63,99	4
$5^2(1)$	25	1
$7^2(1)$	49	1
計		27

解題評注：

此題是利用數的標準分解式來分析因數的個數。解題時需建立一套分組的方法，將所有的數拿來討論，才不致有所疏漏。

問題編號
4803

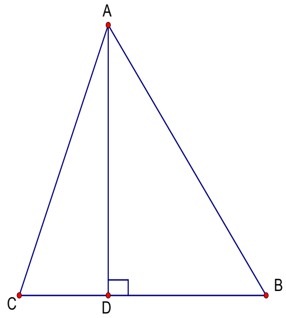
ΔABC 中，AD⊥BC 於 D 點，∠A＝45°、BD＝3、CD＝2，求ΔABC 面積？

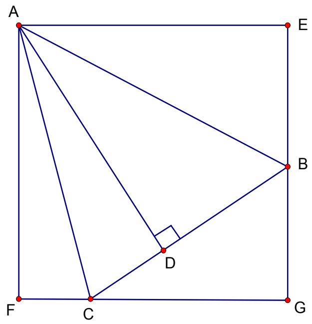
參考解答：

以 AB 為對稱軸將ΔADB 作軸對稱得ΔAEB、以 AC 為對稱軸將ΔADC 作軸對稱得ΔAFC。延長 EB 與 FC，二直線交於 G 點，則 AEGF 為正方形。

ΔBCG 中（x－3）^{2}＋（x－2）^{2}＝5^2

得 x＝6　ΔABC 面積＝$\dfrac{5\times 6}{2}$＝15





解題評注：

解法的部份包括代數的運用、三角函數解法、解析幾何（定座標）、甚至利用向量垂直的概念解出，從不同角度都可以解答本題所要求，然而同學們如果利用兩個直角三角形對於 $\overline{AB},\overline{AC}$ 邊分別作軸對稱，將會發現另一個不錯的解法。

問題編號
4804

設數列$\{a_n\}$的項為

$1,2,3,4,2,3,4,5,3,4,5,6,\cdots$ 求 a_{2006} 及這個數列的前 95 項的和 S_{95}。如果可能，你是否可以用高司符號表出 a_n 及 S_n？

參考解答：

數列 $\{n\}=1,2,3,4,\cdots,n,\cdots$

數列 $\left\{3\left[\dfrac{n-1}{4}\right]\right\}=\{0,0,0,0,3,3,3,3,6,6,6,6,\cdots\}$

兩個數列逐項相減，得到題中的數列 $\{a_n\}$

所以 $a_n=n-3\left[\dfrac{n-1}{4}\right]$

故 $a_{2006}=2006-3\left[\dfrac{2006}{4}\right]=503$

直接求 S_{95}，

$$S_{95}=\frac{1}{2}\times95\times96-4(3+6+9+\cdots+66)-3\times67=3600$$

如果要用 n 來表示 S_n

則 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k-3\left[\frac{n-1}{4}\right])=\frac{n(n+1)}{2}-3\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n-1}{4}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}-3(\frac{\left[\frac{n}{4}\right](\left[\frac{n}{4}\right]-1)}{2}\times4+(n-\left[\frac{n}{4}\right]\times4)\left[\frac{n}{4}\right])$$

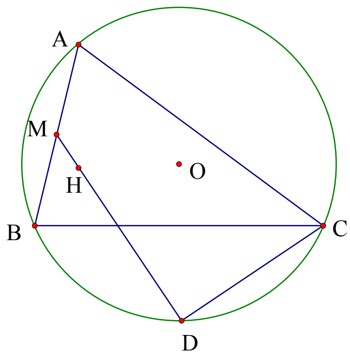
$$=\frac{n(n+1)}{2}+6\left[\frac{n}{4}\right]^2-3(n-2)\left[\frac{n}{4}\right]$$

解題評注：

本題需要詳細討論，注意細節，許多同學答案都差一些些，實為可惜。

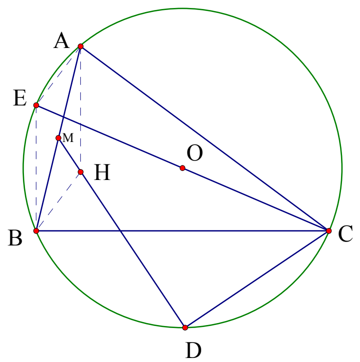
問題編號
4805

已知△ABC 的垂心為 H，外接圓的圓心為 O，M 為 AB 中點，連結 MH 並延長交圓 O 於 D。求證：$HD\perp CD$。



參考解答：

作圓 O 直徑 COE，連接 AE，BE，AH，BH。因為 $\angle CAE=90^\circ$，所以 $EA\perp AC$。又 H 為垂心，則 $BH\perp AC$。故 $EA//BH$。同理 $EB//AH$，所以四邊形 $BHAE$ 為一個平行四邊形。故線段 AB 與 EH 互相平分。又由題意知 M 為 AB 的中點，且點 D 在 MH 的延長線上，於是 E、M、H、D 共線，故 $HD\perp CD$。



解題評注：

大部分同學答的都不錯，但在寫證明部分，有些不夠清楚，不容易閱讀，是值得改進的地方。