利用人工智慧輔助國中數學二次函數圖形 的課程教學

林瑞文* 鄭詩婷

高雄市立左營國民中學

壹、人工智慧(AI)與 Python 程式

人工智慧 ChatGPT 技術在程式教育領域的應用_ChatGPT(Chat Generative Pre-trained Transformer),即聊天生成預訓練轉換器,是 Open AI 開發的人工智慧聊天機器人程式,於 2022 年 11 月推出後引發 AI 應用狂潮, ChatGPT 在輔助程式設計方面可以提供多種功能,包括程式碼建議和完成、問答和解釋、程式碼重構建議、錯誤排除和修復等。這些功能可以協助開發者提高生產力、加速開發流程,並提供品質更好的程式碼。其中,利用自話中文句子給予提示(prompt),就能生成程式碼的功能,讓使用者有更多的機會設計程式解決問題。

Python 是一種高級程式設計語言,其特性如下:

一. 簡潔、易讀和易學。

- 二.多用途,Python 是一種通用程式語言,可用於開發各種應用,包括網頁開發、數據分析、人工智慧、機器學習、自然語言處理、物聯網等。
- 三.豐富的庫(Library)和框架(framework): Python 擁有,如 NumPy、Pandas、

Matplotlib、TensorFlow、PyTorch 等庫,這些庫和框架為開發者提供了豐富的工具和 功能,使得開發更加高效,這就是 Python 被廣泛使用的主因,所以有人稱其為「膠 水程式」,例如利用 openpyxl 庫就能使 Python 控制 MS Excel,但是每一種庫都會 帶來新的程式語法,對程式編寫者造成不小的壓力,現在有了 ChatGPT 的協助,利用 輸入中文 prompt 就能生成程式碼,若稍有程式基礎,還能以此進行修改,來完成進 階的任務。

108 課綱國中生活科技領綱,關於資訊科技部分的學習內容如下:

程式設計 (P)	七年級 資 P-IV-1 程式語言基本概念、功能及應用。 資 P-IV-2 結構化程式設計。 八年級 資 P-IV-3 陣列程式設計實作。 資 P-IV-4 模組化程式設計的概念。
-------------	---

*為本文通訊作者

現行有些版本的教科書在國中就引入 Python 教學,有利於學生運用 ChatGPT 寫出 Python 程式來學習二次函數圖形。

貳、國中數學課程中的二次函數圖形教學

國中數學領綱關於二次函數圖形的學習內容與對應的學習表現整理如下:

學習內容	對應的學習表現	
F-9-1	f-IV-2	
二次函數的意義:二次函數的意義;具體情境中列出兩量的	理解二次函數的意義,並	
二次函數關係。	能描繪二次函數的圖形。	
F-9-2	f-IV-2	
二次函數的圖形與極值:二次函數的相關名詞(對稱軸、頂	f-IV-3	
點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小	理解二次函數的標準式,	
值); 描繪 y = ax ² 、 y = ax ² + k、 y = a(x - h) ² 、 y = a(x - h) ² +	熟知開口方向、大小、頂	
k 的圖形;對稱軸就是通過頂點(最高點、最低點)的鉛垂	點、對稱軸與極值等問	
線; $y = ax^2$ 的圖形與 $y = a(x - h)^2 + k$ 的圖形的平移關係; 已	題。	
配方好之二次函數的最大值與最小值。		
備註:「二次函數的配方法」及「二次函數的應用問題」為10年級課程(F-10-1),本		
條目的教學聚焦在其圖形的特性。		

二次函數圖形一般教學大綱如下:

(1). 二次函數的意義。

- (2). 描出多點,畫出平滑的y = x²曲線。列出圖形的對稱軸、開口方向及頂點。以下各種曲線都比照辦理。
- (3). 二次函數y = ax²的圖形。開口大小的討論。
- (4). 二次函數 $y = ax^2 + k$ 的圖形。圖形上下平移的討論。
- (5). 二次函數y = (x h)²的圖形,並熟悉二次函數的標準式。圖形左右平移的討論。
- (6). 二次函數 $y = a(x h)^2 + k$ 圖形的討論。

本文介紹用 ChatGPT 寫協助國中二次函數圖形教學,聚焦在上述教學順序2到6點 中有關二次函數與圖形特徵的關聯部分,即利用 ChatGPT 寫出 Python 程式來繪製各式 二次函數圖形,利用修改參數立即呈現不同的圖形結果,讓學生充分體會二次函數圖形的 特性與平移曲線的方法。

參、資訊環境設定與注意事項

- (1). ChatGPT:國中生在學校直接使用 ChatGPT 3.5 有兩個問題,首先:雖然可以用學生的 Google 帳號登錄,但需要經手機認證,一些學生沒手機就須在家完成。再者,更麻煩的是如果一間電腦教室有多人登入使用,AI 回應速度就會變慢,解決方法是讓學生以 Google 帳號直接登錄 poe.com 網站,不用經過手機認證,就能順利使用 ChatGPT 3.5,網站上還有其他 AI 工具可以使用。
- (2). Python 程式:建議使用 Anaconda,這是一個用於資料科學、機器學習和大資料處理的開源發行版本和庫管理器。它包含了許多常用的 Python 庫,如 NumPy、Pandas、SciPy、Matplotlib、scikit-learn 等,以及用於資料分析和處理的工具。一般進入 Anacond後,會點選 Jupyter Notebook或 Spyder 來寫 Python 程式,如此可以省掉許多自外部引入庫的步驟,程式碼中最前面以 import 開頭的幾行都能順利執行,不用另外進行設定。
- (3). 一般學校電腦教室可以在教師用電腦直接控制所有學生電腦安裝特定程式,請管理 人員處理一次即可,又電腦教室內的電腦都裝有還原卡,安裝一次就能一直順利使 用。
- (4). 一般 Python 用來繪圖的庫 Matplotlib,生成圖形中無法顯示中文,個人試過 ChatGPT 提供的幾種方法,較方便可行解決方法見參考資料1。但避免學生分神處理資訊問題, 建議先不處理,因為出現的英文單字就幾個,可以讓學生向 ChatGPT 提問,即能迅 速理解其意義。
- (5). 若要簡化設定,可用 Colaboratory 線上編輯、執行 Python,使用時將 ChatGPT 提供的程式碼直接貼上網頁即可執行,不用另行設定,不過繪圖庫 Matplotlib 不能支援中文。

肆、教學活動

第一節:熟悉資訊工具與初步繪製二次函數圖形

(一)教師示範:給 ChatGPT 提示語 prompt(以下以灰底表示)寫出_Python:畫出 y=x^2 的圖形,所描的點都用黑點表示。

```
import numpy as np
 2 import matplotlib.pyplot as plt
 3
 4 # 解決負數顯示問題
 5 plt.rcParams['axes.unicode minus'] = False
 6
 7 # 設置圖片大小和 DPI
 8 \text{ plt.figure(figsize=(10, 6), dpi=100)}
 9
10 # 生成 x 值
11 x = np.1inspace(-5, 5, 100)
12
13 # 計算對應的 y 值
14 y = x ** 2
15
16 # 繪製曲線
17 plt.plot(x, y)
18
19 # 繪製黑點
19 # 留秘訊軸
20 plt.scatter(x, y, color='black')
21
22 plt.xlabel('x')
23 plt.ylabel('y')
24 plt.title('y = x^2')
25 plt.grid(True)
26 plt.show()
                   圖一:程式畫面
```

◎技術問題:

(1). 第 4-8 行 ChatGPT 剛開始不會列出,這是筆者在測試過程中要求 ChatGPT 修正而來,當圖形無法顯示負號時可加入第 4-5 行,第 7-8 行則可讓圖形較為清晰,可以鼓勵同學自行調整參數試看看。例如想弄清楚第 11 行的功用,可以對 ChatGPT 發問,示範如下:

發問:	
plt.figure(figsize=(10, 6), dpi=100) ?	
ChatGPT :	
這個程式碼片段是用來在 Matplotlib 中設置圖形的大小和解析度。具體來說:	
plt.figure() 函數用於創建一個新的圖形。	
figsize=(10,6) 參數指定了圖形的寬度和高度,這裡的寬度是 10 個單位,高度是	
6 個單位。	
dpi=100 參數指定了圖形的解析度為 100 點每英寸 (Dots Per Inch)。	
因此,這段程式碼的作用是創建一個大小為 10x6 單位、解析度為 100 DPI 的新	
圖形。	

(2). 第 22-24 行引號內的字元一般用綠色字體,就是圖上座標軸名稱與圖形標題,如果改為中文就會以"□"顯示,因為 Matplotlib 未支援中文。

(二)上述程式執行結果如圖二所示。



圖二:由黑點組成的曲線

圖三:只有開口大小不同的兩曲線

(三)學生實作:請同學將第11行貼到 ChatGPT 中,最後加上問號,以了解其功用。

- (四) 學生實作:修改第 11 行 x = np.linspace(-5, 5, 100) 中指取樣次數的數字 100,更改 順序 10→30→50→100→150。
- (五)教師引導討論:取樣值多寡對曲線的影響與意義。
- (六) 學生實作:給 ChatGPT 中文 prompt,畫出 $y = x^2 Dy = 3x^2$ 畫兩條圖形。參考解:寫 出_Python_在一張圖中畫出 $y=x^2 Dy=3x^2$ 的圖形。執行結果如圖三所示。
- (七)學生實作:讓學生嘗試修改程式使曲線上下翻轉。
- (八)教師引導討論: y = ax²前面的係數a 對圖形造成怎樣的影響?
- (九)學生實作:給 prompt,在程式中加入對稱軸(直線與方程式)及頂點座標。參考解:寫 出_Python_畫出 y=x^2 的圖形,並標示出頂點座標、對稱軸及軸方程式。

◎技術問題:執行後若對稱軸太細不明顯,可以將程式碼

標示對稱軸

plt.axvline(vertex_x, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5, label='Symmetry axis') 中'gray'改為'green', linewidth=0.5 線寬改為 2.5。執行結果如圖四所示。



圖四:標示出對稱軸與頂點的曲線



第二節:二次函數圖形的平移

(一) 學生實作:如果要將y = x²圖形頂點移到(0,5),程式碼 y = x ** 2 (代表y = x²)需怎 麼修改?。

參考解:改為 y = 5+x ** 2 或 y = x ** 2+5 。

- (二)教師引導討論:要將二次函數圖形垂直上下移動時,方程式需如何修改?
- (三)學生實作:如果要將 $y = x^2$ 圖形頂點右移到(5,0),程式碼 $y = x^{**2}$ 需怎麼修改?。 參考解:改為 $y = (x-5)^{**2}$ 。
- (四)教師引導討論: y = (x − h)²,數字 h 對圖形造成怎樣的影響?
 ◎技術問題: plt.text(vertex_x + 0.1, 10, 'x = 5', rotation=90) 控制對稱軸方程式的出現位置,"10"為 y 座標,若不夠明顯可以可自行調整。
- (五)教師引導討論:要將二次函數圖形y=x²垂直上下移動時,方程式需如何修改?
- (六)教師引導討論: $y = x^2 + k$ 與 $y = x^2 \chi$ 函數圖形的差異?數字k對圖形造成怎樣的影響?
- (七) 學生實作:讓 ChatGPT 生成程式,執行後須輸入y = a(x h)² + k 中 a、h 及 k 之值。
 輸入後在同一張圖畫出y = a(x h)² + k與y = x²的曲線。
 參考解: 寫出 Python_執行後先顯示"二次函數 y = a(x h)^2 + k",再讓使用者輸入
 數字 a、h 及 k。輸入後在同一張圖畫出 y = a(x h)^2 + k 與 y = x^2 兩條曲線,並
 標示出兩曲線的頂點、對稱軸,並列出軸的方程式。
 執行後輸入 a=2、h=5、k=50 的結果如圖五所示。



課後評量:

解答:

第 1 題 $y = (x - 4)^2$ 。第 2 題 $y = 5x^2$ 。第 3 題 $y = 1000 + (x - 10)^2$ 。第 4 題 $y = 5x^2$ 。 第 5 題 $y = -(x - 5)^2$ 。

伍、Python 與其它繪圖工具的比較

常見的二次函數圖形繪圖工具有 Desmos、GeoGebra 等,與本文的方法比較起來,都 有不用下載程式、可直接在線上執行繪圖的便利性,但是若要標示頂點、交點座標,或是 呈現二次函數圖形需由多點連接才能有光滑曲線的性質(參見圖六),就不方便。本文的方 法學生可以修改參數後立即看到不同的曲線,對建立對二次函數與曲線的連結,有莫大幫 助。本教案設計也讓學生體驗 AI 的強大功能,藉由嘗試利用 AI 來寫程式,更可促進學生 對二次函數圖形圖形的理解。



圖六:很容易用 Python 繪出的圖形

參考文獻

- [1] 使 Matplotlib 圖形中可以顯示中文的方法:https://www.youtube.com/ watch?v=taIPT9lp3iQ。
- [2] 線上編輯、執行 Python 程式, Colaboratory: https://colab.research.google.com/。
- [3] 線上繪製二次函數圖形 Desmos: https://www.desmos.com/calculator?lang=zh-TW。
- [4] 線上繪製二次函數圖形 GeoGebra: https://www.geogebra.org/calculator。
- [5] 本文用到的 Python 程式: https://bit.ly/4aOL1B0 。