

四維空間霍普夫纖維化圖形探索在數學算板上的實踐(上)

林保平

前台北市立教育大學數資系退休副教授

壹、霍普夫纖維化簡介

我們知道一個「圓」就是平面上的物件，「球面」就是三維空間中的物件。數學家定義 n -球面 (n -sphere) 是 $n+1$ 維歐氏空間的球面，半徑為 1 的 n -球面，記為

$$S^n = \{x \in R^{n+1} \mid \|x\| = 1\}, \text{ 其中 } R \text{ 為實數集合, } S^n \subset R^{n+1}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1},$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2}, \text{ 球面方程式為 } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1.$$

設 $h: S^3 \rightarrow S^2$ ， $h(a, b, c, d) = (2(ac + bd), 2(bc - ad), a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$ ，其中 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ， h 稱為霍普夫 (Hopf map) 映射 (Zamboj, 2021)。

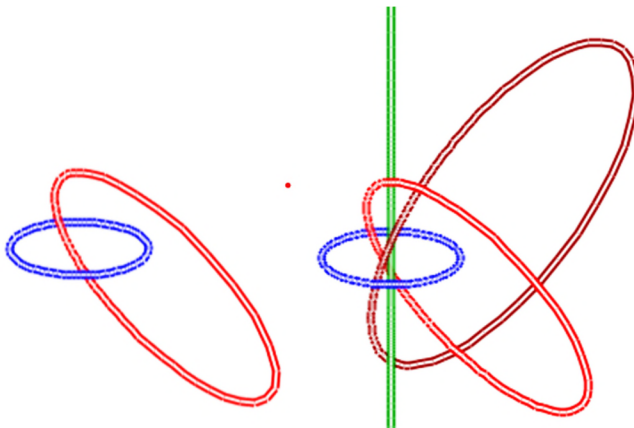
霍普夫映射有下列性質 (Hopf, 1935 及 Pinkall, 1985)：

- (一) h 為連續的映成 (surjective) 映射。
- (二) 若 $(x, y, z) \in S^2$ ，則 $h^{-1}(x, y, z)$ 是 S^3 的大圓，稱為霍普夫纖維 (Hopf fiber)。
- (三) 任意兩纖維都不相交，是鏈結 (linked) 且平行的 (parallel)。
- (四) 所有的纖維的聯集，就是 S^3 。
- (五) 設 Γ 為 S^2 上的任意封閉曲線 (closed curve)，則 $h^{-1}(\Gamma)$ 稱為 S^3 中的霍普夫輪環面 (Hopf torus)。

由於 $h(S^3) = S^2$, $h^{-1}(S^2) = S^3$ ，透過霍普夫映射，利用稱為纖維的圓 (S^1) 及球面 (S^2) 來描述歐氏四維空間中 S^3 及其中的物件，稱為霍普夫纖維化。 S^2 上的點坐標為 $(x, y, z) = (\sin(\varphi)\cos(u), \sin(\varphi)\sin(u), \cos(\varphi))$ 其中 $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ ， φ 為天頂角 (zenith)， u 為方位角 (azimuth)。對應纖維圓的參數式 (t 為參數) 為

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\varphi}{2})\cos(t+u) \\ \cos(\frac{\varphi}{2})\sin(t+u) \\ \sin(\frac{\varphi}{2})\cos(t) \\ \sin(\frac{\varphi}{2})\sin(t) \end{bmatrix}, \text{ 其中 } 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq t, u \leq 2\pi \quad (\text{Zamboj, 2021, P839})$$

圓鏈結是指兩個不共平面的圓，互相穿過對方的內部，但不相交。設 Γ_1, Γ_2 為空間曲線，若 Γ_1 上任一點至 Γ_2 上點的最短距離都相等為 d ，且 Γ_2 上任一點至 Γ_1 上點的最短距離也都是 d ，則稱此兩曲線平行（或說兩曲線處處等距），霍普夫纖維的鏈結及平行（證明參看 Gluck, 1986）。圖 1 展示的就是四維空間中 2 條，及 4 條纖維互不相交且兩兩鏈結的纖維，以 $(0,0,0,1)$ 為球北極，透過極球平面投影（Stereographic projection），投影至三維空間的圖形（參看：林，民 112），極球平面投影是一個保角變換（conformal map），可將球面圓映射為圓或直線，緯線圓映射成延伸的複數平面上以原點為中心的同心圓，過北極點的球面圓映射成直線，經線圓映射成過原點的直線。由於此投影是一對一映成映射，故其鏈結的狀況仍然維持，但平行則未必，因為投影並非保距變換。圖一右圖中的鉛直線為 S^2 北極點對應的纖維圓（通過 ∞ 點）；兩圖中藍色圓為南極點 $(0,0,0,-1)$ 對應的纖維，其中任意兩圓都是鏈結的。

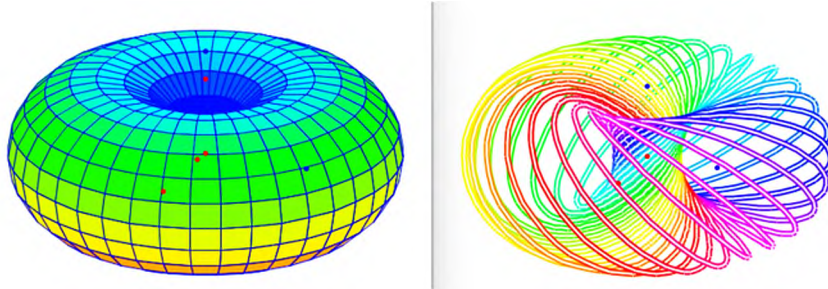


圖一：兩條及四條纖維兩兩互相鏈結的圖形

圖二左圖其實是 40-20 輪環多面體,這是正 20 邊形繞中心軸，旋轉角

$i \cdot \frac{2\pi}{40}, i=1,2,\dots,40$ ，並連接對應頂點而得的圖形。當多面體是圓時，旋轉一圈而得的

軌跡曲面，就是輪環面，圖 2 右圖是纖維化的霍普夫輪環面從四維空間投影到三維空間時的圖像，它是球面赤道圓上的點對應的纖維群。



圖二：三維空間中的輪環面(圖左)；纖維化的霍普夫輪環面投影至三維空間的圖形(圖右)。

貳、數學算板中 S^2 上霍普夫纖維化的實踐

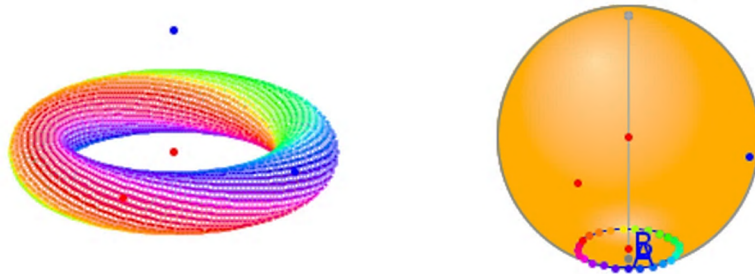
圖三展示的是 S^2 上霍普夫纖維化的探索程式。



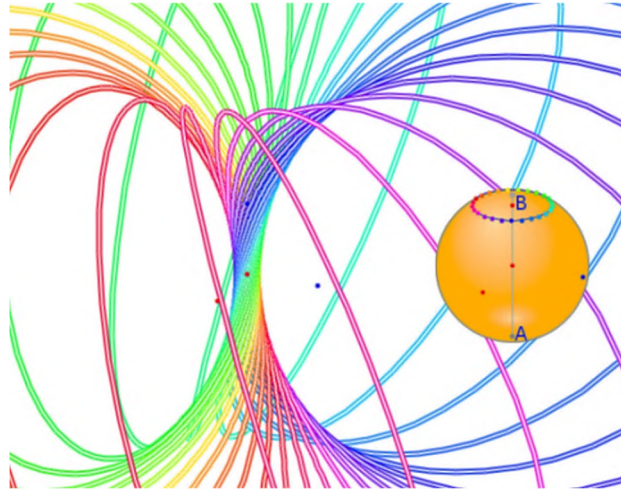
圖三： S^2 上霍普夫纖維化的探索程式

在此程式環境中，我們可以看到兩個坐標系統，右邊的是可移動及旋轉的三維空間系統，呈現的是 S^2 球面，球半徑為 1。左邊的是建立在可旋轉三維空間坐標系上的四維空間呈現系統（林，民 112），我們將四維空間物件投影至此坐標系統上。兩個坐標軸都可透過按鈕「軸點」呈現三軸的單位點，單位點可控制整個系統的單位長。按鈕「歸正」可恢復至旋轉前的起始位置。利用畫面上的按鈕及數學算板的選單，我們可以探索霍普夫纖維化的各種性質。我們可以選取或作出球面上的任一點（或同時選取球面上多個點），透過按鈕「增新纖維」，依點的顏色畫出此點對應的同色纖維，圖 3 畫面中間的纖維圖就是右方球面圓上點群對應的纖維群，目前的投影選項是「極球平面投影」（P26 會討論此按鈕的其他選項）。若點是球面上的可動點，移動這些點，其對應的纖維就會做相應的位置變化。按鈕「秀藏新建圖形」，可展示或隱藏新建圖形。新建的圖形也可以透過按鈕「清除新增」來清除新建纖維以便重新建立新纖維（選擇要刪除的纖維對應點，再按鈕加以刪除，或 Shift 按鈕刪除全部新增）。

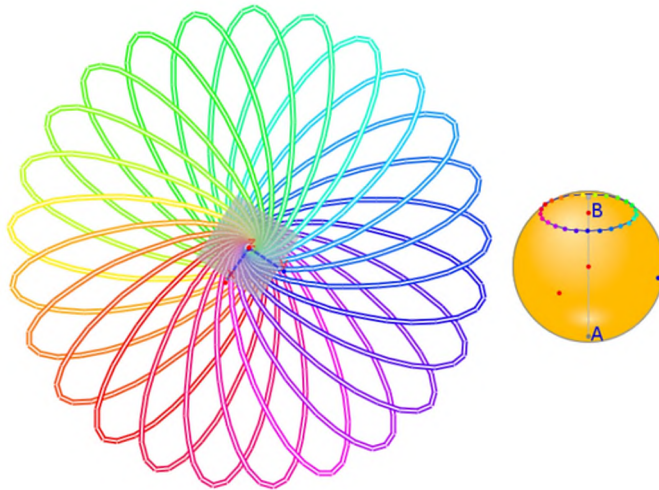
目前畫面上的圖形，是程式的內建圖形之一，我們也可以利用按鈕「秀藏內建圖形」來展示或隱藏內建圖形，方便觀察新建圖形，或同時呈現內建及新建圖形加以比較，隱藏內建圖形，建立少數條新纖維投影，可以觀察纖維鏈結且不相交的狀況。圖 3 的內建圖形作法是：在球面上，取一個自由點 A，作出它的球面反向點（antipodal point），再作出直徑，並在直徑上取一個動點 B，過 B 作一垂直直徑的平面，與球面交於一圓。在此圓上我們作出正多邊形頂點（第一頂點為旋轉控制點），依點顏色作出對應的纖維，內定的位置是 A 點在南極，B 點在球心，此時圓為赤道圓，變動 B 點位置可將圓作緯度變化，觀察緯度線上點構成的輪環面。B 點在南極時，圖形（纖維輪環）本應收縮成赤道圓（xy 平面單位圓），因圓已不存在，點亦不存在，故圖形消失。點 B 由南極向北移動時，纖維輪環上下延伸且向外擴張，到達北極點時，輪環纖維延伸擴展至 ∞ 而成一條直線。圖四展示的是 B 點接近南極時的面相，圖五是 B 點接近北極點時的面相。前面圖 2 是 B 點在球心時的纖維圖，圖五之一展示緯線圓纖維投影由北極向南極看時的樣貌（上視圖）。



圖四：B 點接近南極時的面相

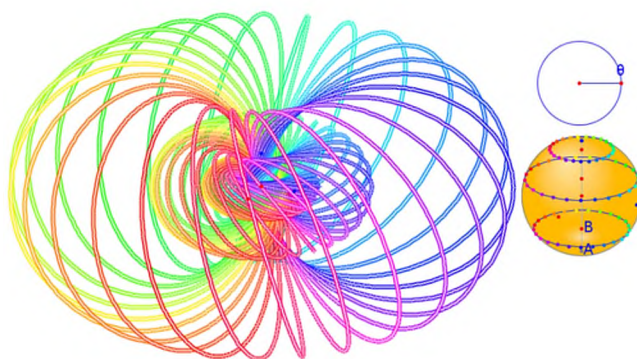


圖五：B 點接近北極時的面相



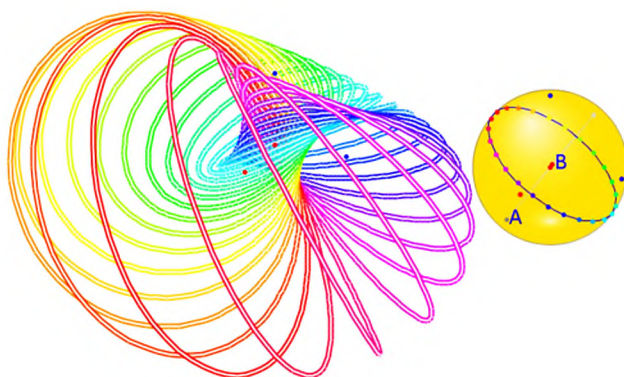
圖五之一：緯度圓纖維投影的另一樣貌（上視圖，由北極向南極看時的圖形）

圖五之二展示的是三條緯度圓上點纖維同時畫出的投影圖（三層不相交的的霍普夫輪環面投影，此投影是三維空間輪環面），取的纖維數均為 25，取的點數多纖維會更密集。注意：這些纖維圓在三維單位球面（包含於四維空間）上都是互相平行且兩兩鏈結的（證明參看 Gluck，1986），圖中展示的是它們在三維空間的極球平面投影，投影得到的圓，在三維空間中，是不相交且是兩兩鏈結的，但並不平行。

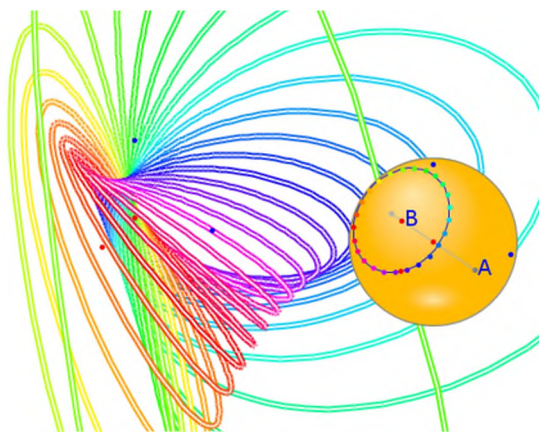


圖五之二：三層的不相交的霍普夫輪環面

A 點若離開南極點，圓將不再是緯度線，配合 B 點的移動，可成球面上的任一圓。圖六展示 A 點不在南極點，B 點在球心的一個面相。圖七是 A 點不在南極，B 點不在球心時的一個面相。

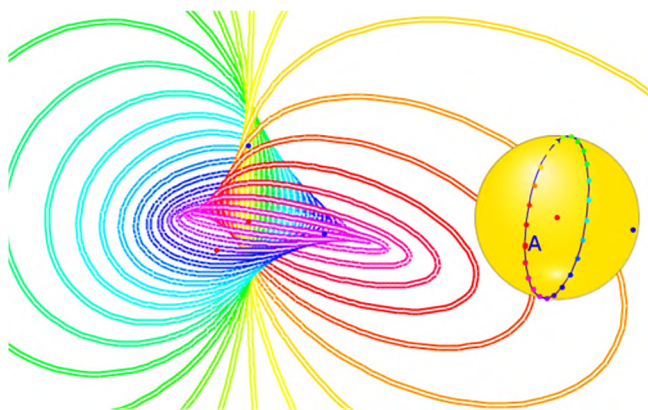


圖六：A 不在南極點，B 點在球心時的一個面相。



圖七：A 不在南極點，B 點不在球心時的一個面相

圖八是內建圖形之二（取程式時，同時按 Shift），一個像似把手狀的圖形。這是可變動的經線上的點對應的纖維投影圖。在球面赤道圓上取一個半自由點 A，過 A 作出球面經線。將移動 A 點就可改變經線的位置，而相應的纖維也會改變。事實上，經線的 XY 旋轉（A 點在赤道圓上的移動），恰為對應纖維群在四維空間中的 XY 旋轉。

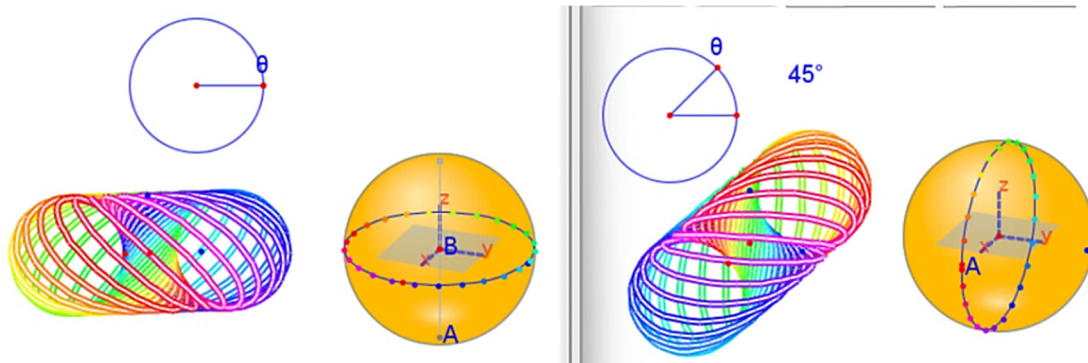


圖八：內建纖維圖之二：經線點對應纖維

有關程式「霍普夫纖維化 I」的簡介、不同緯度線或經度線上的點對應的纖維投影圖，參看影片 1(<https://youtu.be/U8PRRs8XeJ0>)。點與纖維對應及纖維鏈結投影圖觀察，參看影片 2(<https://youtu.be/Ne7DQXUr9OU>)。

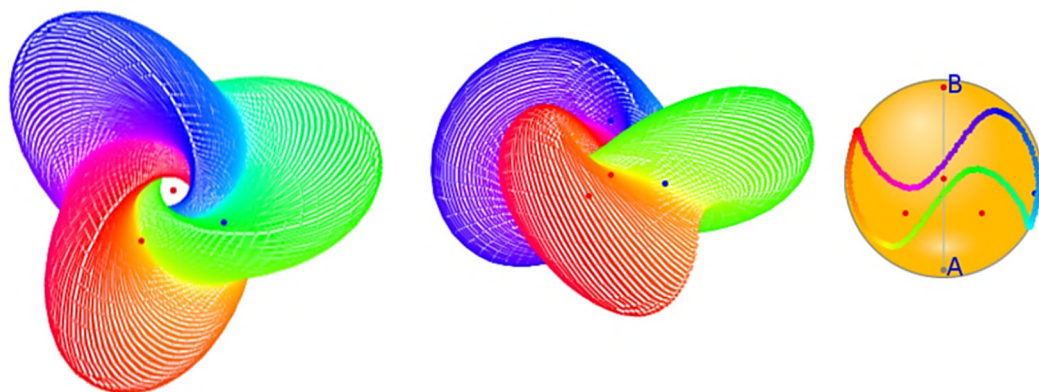
不論是新建或內建圖形，任何一個輪環面相均可透過「三維坐標軸的旋轉」從四面八方來觀察其不同的樣貌（在坐標中心點 100 光點的範圍內以滑鼠拖曳）。我們也可利用四維坐標的選項按鈕「旋轉」來觀察物件在四維空間六種主旋轉 XY、XZ、YZ、XW、YW、ZW，及三種等角旋轉（XYIZW, XZIIYW, YZIXW，Isoclinic Rotation），或任意「等角的」主旋轉乘積之動態圖形變換，選取選項之後按「動畫」按鈕可自動作該旋轉，或以滑鼠移動程式畫面上左邊圓上的 θ 動點，以手動操作改變旋轉角度作觀察（林，民 112）。

觀察霍普夫輪環面「四維旋轉」投影而得的圖形，我們發現它們其實也是某些霍普夫輪環面的樣貌之一。圖九中右圖是 XZ 經線對應的纖維群（其投影圖為圖三），旋轉 45 度的投影圖。它與左圖：緯線赤道圓對應的纖維投影圖的一個樣貌（圖三輪環面放平），兩者樣貌是相同的。其實圖六及圖七也是與 Z 軸相關的四維旋轉的一個樣貌。這就是我們後面因此觀察現象而加以討論的「旋轉纖維化」（註：這是作者提出來的名詞）。

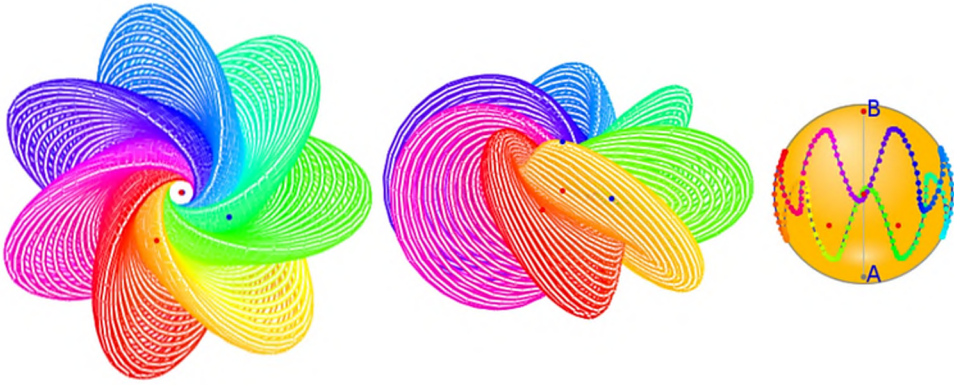


圖九：在緯線為赤道圓（左圖）及 XZ 經線（右圖），其對應纖維在 XW 旋轉 0 度及 45 度時投影圖的比較。

不只是圓，球面上的任意封閉曲線的反像也是霍普夫輪環面。圖十，圖十一展示的是分別是球面 3 葉及 7 葉正弦曲線上點的纖維投影圖的兩個樣貌，左圖為上視圖（三維空間由 z 軸正向沿 z 軸向 xy 平面投影,xy 平面是螢幕平面），數學算板可提供上、下、左、右、前、後的六視圖（林，民 107.pp47）選項按鈕（圖三的最後一個按鈕）。數學算板可製作 n-葉球面正弦曲線，並取點作出相應的纖維（也是霍普夫輪環面）投影圖。數學算板提供了輸入葉數的輸入框，可改變輸入的葉數（函數的週期數），圖形會作相應的改變。



圖十：三葉球面正弦曲線纖維的兩個樣貌

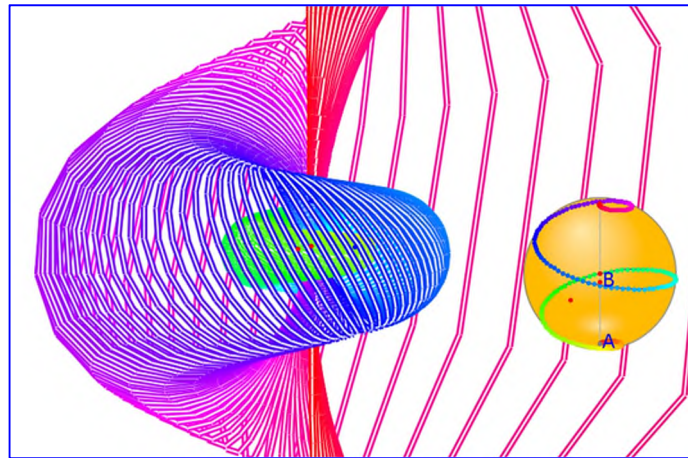


圖十一：七葉球面正弦曲線纖維的兩個樣貌

球面正弦曲線 (spherical sinousoid)的參數式為

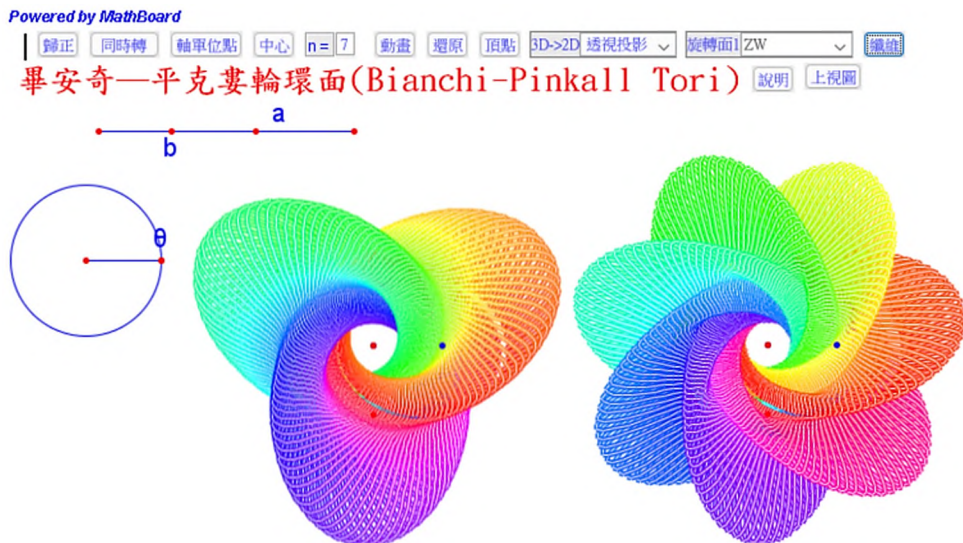
$$\begin{cases} x = r \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+k^2 \cos^2(nt)}} \\ y = r \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+k^2 \cos^2(nt)}} \\ z = r \frac{k \cos(nt)}{\sqrt{1+k^2 \cos^2(nt)}} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ 其中 } r \text{ 為球半徑, } k \text{ 為振幅, } n \text{ 為週期數。}$$

圖十一之一展示的是球面螺線上的點的纖維投影圖，它在三維空間的圖形狀像是立體的「螺」。由於它並非球面上的封閉曲線，故所呈現的圖形應不算是霍普夫輪環面。

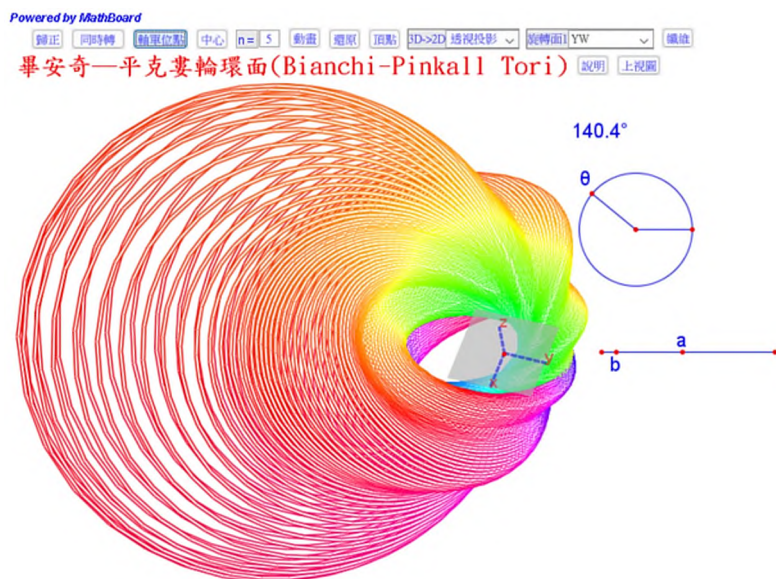


圖十一之一：球面螺線上的點的纖維投影圖

林（民，112）曾展示畢安奇-平克婁輪環面的三維投影圖（曲面式的呈現），我們將其作管狀纖維式的呈現，其與球面正弦曲線的投影圖在葉數及形狀對應上雷同，如圖十二所示。由於這個程式是獨立的程式，在動態展示上相當輕便，可按鍵直接令其轉動，圖十二展示的是 3 葉及 7 葉的上視圖。圖十二之一展示的是 5 葉 YW 旋轉 140.4 度時的一個樣貌。

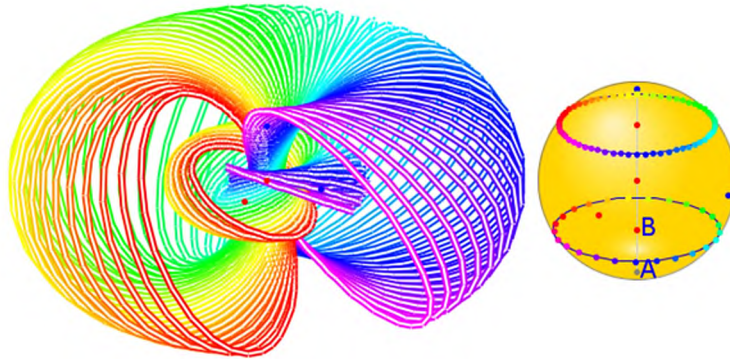


圖十二：畢安奇-平克婁輪環面管狀顯示的上視圖。



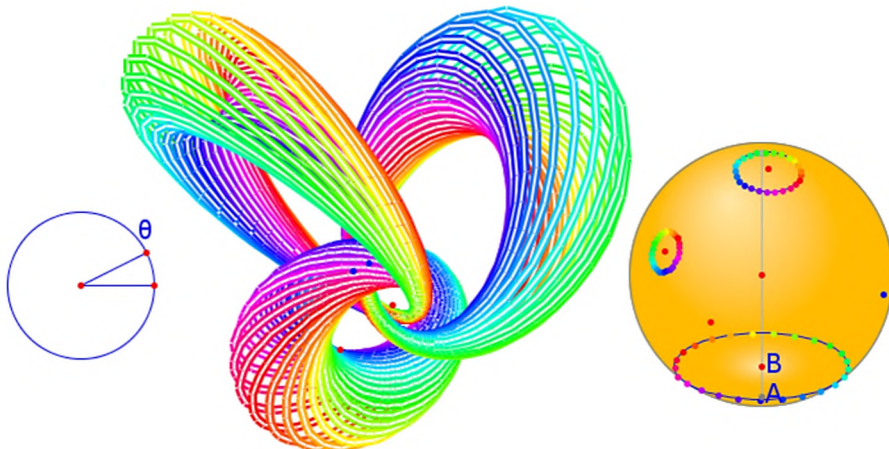
圖十二之一：畢安奇-平克婁輪環面 YW 旋轉 140.4 度的一個樣貌

數學算板中圖三的「呈現纖維比例」輸入框，可直接輸入小於 1 的正小數展示新建或內建的全部或部分纖維，「部分呈現」可協助觀察圖形的內部。圖十三展示的就是兩層的輪環面展示 85% 纖維的樣貌。此小數值會與圖中「呈現比例」點（線段上的點）互動。在線段上移動此點，其數值會呈現在輸入框中。圖形纖維也會依比例呈現。動態移動「呈現比例」點，程式會依序由第一點至最後一點態畫出每一纖維，展示圖形「生成」的過程。程式展示的纖維圖，也均可透過四維「旋轉」選擇按鈕，作動態的旋轉。



圖十三：兩層的輪環面呈現 85% 纖維的投影圖

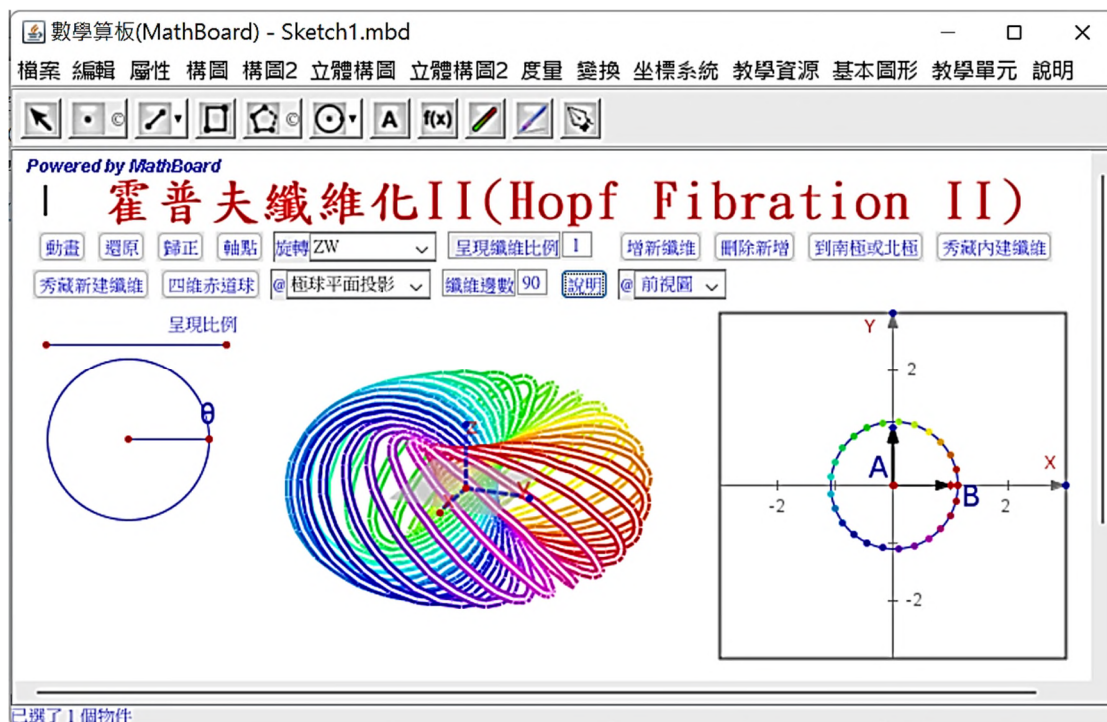
圖十三之一展示的是一個緯線圓、一個過北極點的圓及另一個球面圓，它們對應的纖維構成三個兩兩鏈結輪環面的投影圖。它們是透過隨機調整圓心、半徑並作 YW 旋轉而得的。



圖十三之一：三個不相交球面圓上點對應的兩兩鏈結纖維輪環面投影而得的的圖形

參、數學算板上延伸複平面上霍普夫纖維化的實踐

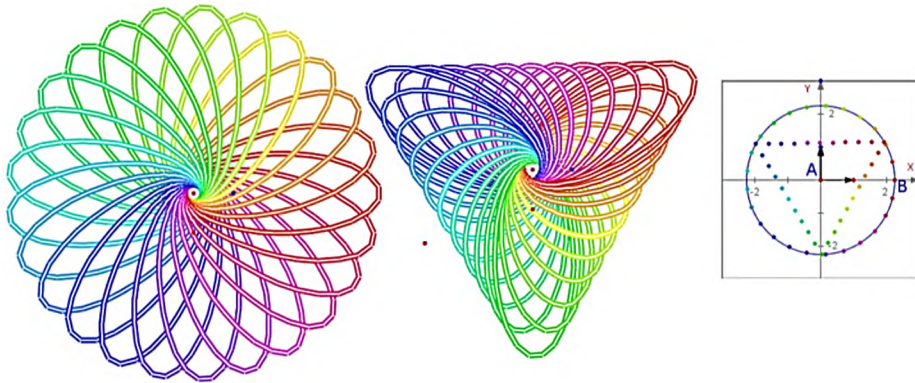
考慮延伸的複數平面 $C^1 = C \cup \{\infty\}$ ，由於 $C^1 \cong S^2$ ，因此我們也可以在 C^1 上取點或取封閉曲線上的點群加以纖維化。圖十四展示延伸複平面霍普夫纖維化程式畫面。其按鈕功能與圖三大致相同。只是右方展示的是延伸的複平面。其方框可有可無。



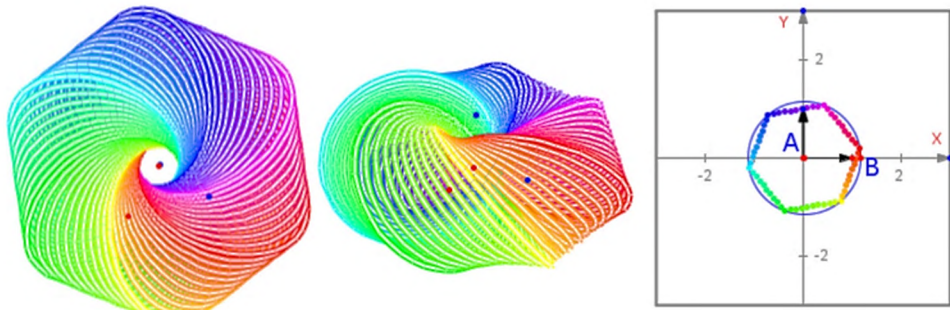
圖十四：延伸複平面霍普夫纖維化畫面

延伸複平面霍普夫程式內建的圖形是以 A 為圓心，B 為半徑點的圓，B 點是以 A 為始點，向右的射線上的動點。移動 A 時，整個圓會移動，但半徑不變。B 移動時圓心不動，但圓及半徑會改變。圓上的點群對應到四維空間的纖維，投影成中間的圖形。目前 A 在原點上，B 在 $(1,1,0)$ 的位置。由於黎曼球面透過「極球平面映射」與延伸複平面形成等價，球面上的經線圓就是複平面上過原點的直線，球面上的緯線圓就是過原點的同心圓，球面圓對應到平面上圓。數學算板透過「極平面球映射」將 C^1 上取得的點或點群，轉換為 S^2 上的點群，纖維化後再投影而得圖形。雖然取得的「映射點」之間距有異，相對於 S^2 ，我們比較容易在平面上畫出封閉曲線（尤其是多邊形），且取得其上定數量的等距點。由於封閉曲線對應到封閉曲線，因此得到的纖維圖仍為輪環面。圖十四之一展示的圓與正三角形上點的相應纖維輪環面投影圖的上視圖。可以看出球面圓上緯線圓，及延伸複平面上以原點為圓心的圓，點纖維投影的上視圖是一樣的（與圖五之一比較）。圖十五展示的是正

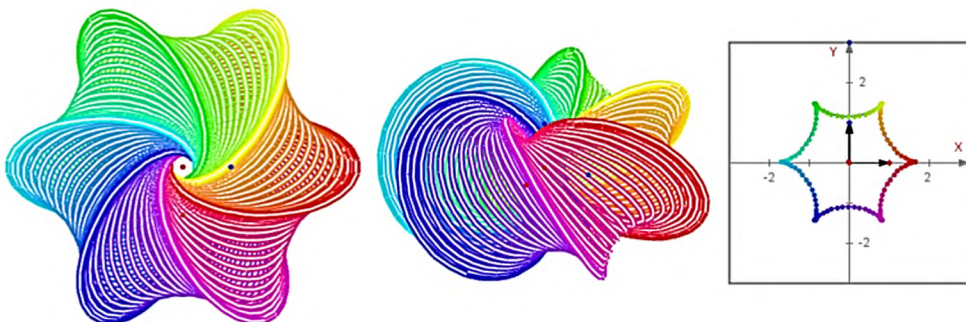
六邊形上的點及其構成的纖維投影的兩個樣貌，左邊圖形是將中間的圖形的上視圖。圖十五之一展示的是六尖內擺線上點對應的纖維投影的兩個樣貌，左圖示上視圖。



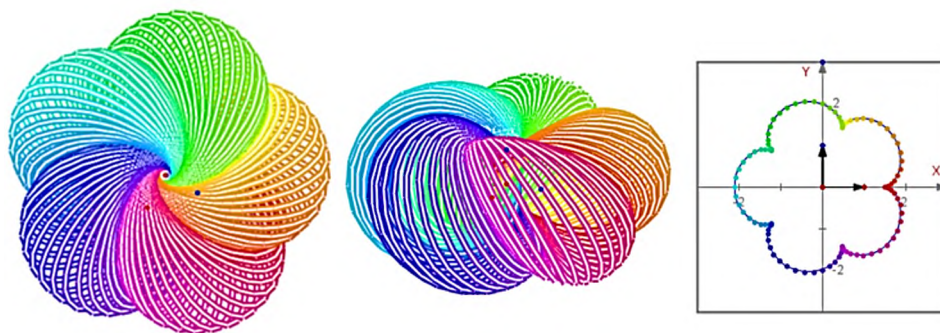
圖十四之一：圓與正三角形點纖維投影的上視圖



圖十五：正六邊形上的點及其構成的纖維投影的兩個樣貌（左為上視圖）



圖十五之一：六尖內擺線上點對應纖維投影的兩個樣貌（左為上視圖）



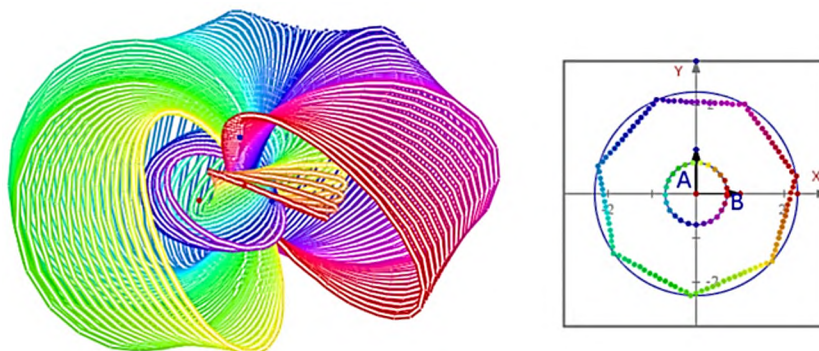
圖十五之二：五尖外擺線上點對應纖維投影的兩個樣貌（左為上視圖）

圖十五之三展示的是 3 葉及 8 葉玫瑰線對應纖維的投影上視圖。顯然中心為原點的玫瑰線因通過原點，每一葉對應纖維投影都會包含 XY 平面上的單位圓（原點對應的纖維投影）。



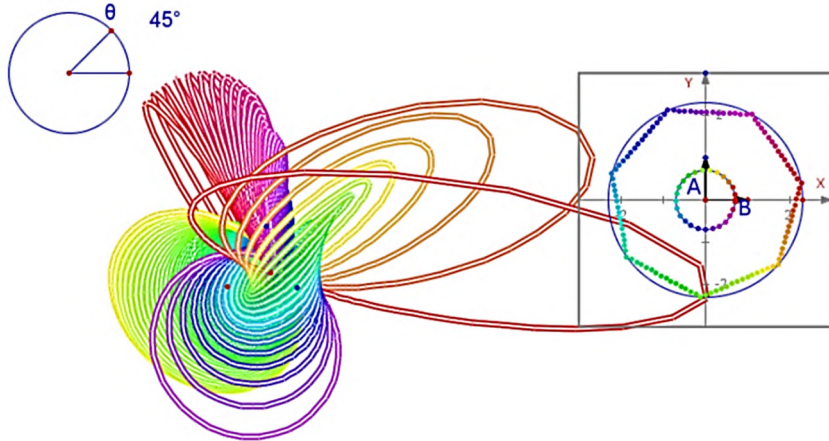
圖十五之三：3 葉及 8 葉玫瑰線對應纖維的投影上視圖

圖十六展示正七邊形與內部一圓上的點，及其對應的 $\frac{6}{7}$ 纖維投影而得的雙層圖形，



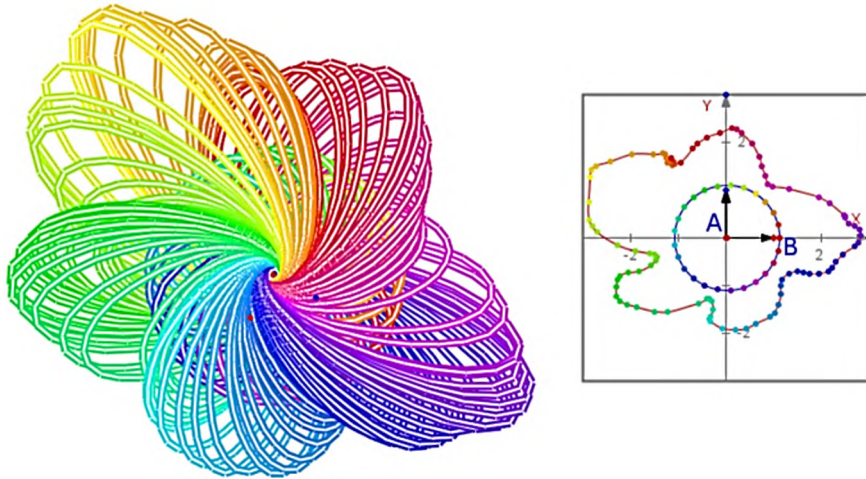
圖十六：正七邊形與內部一圓上的點，及其對應的 $\frac{6}{7}$ 纖維投影而得的雙層圖形

同樣地，所有製作出來的四維空間纖維都可透過四維旋轉點，作四維旋轉並觀察其在三維空間投影的狀態。圖十七展示圖十六作 YW45 度旋轉而得的圖形。部分圓因取點的密度不足，有角狀的呈現。密度愈大，動態的效果愈差。



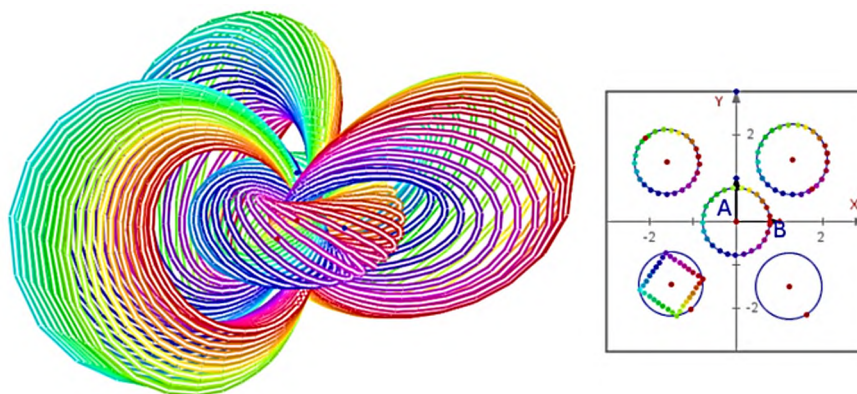
圖十七：圖 16 作 YW45 度旋轉而得的圖形

數學算板也提供手繪曲線取點功能，圖十八展示的是在內建圖之外，另新建一封閉曲線，取點作纖維後得到的圖形。取點間距不均勻，纖維間距較雜亂。

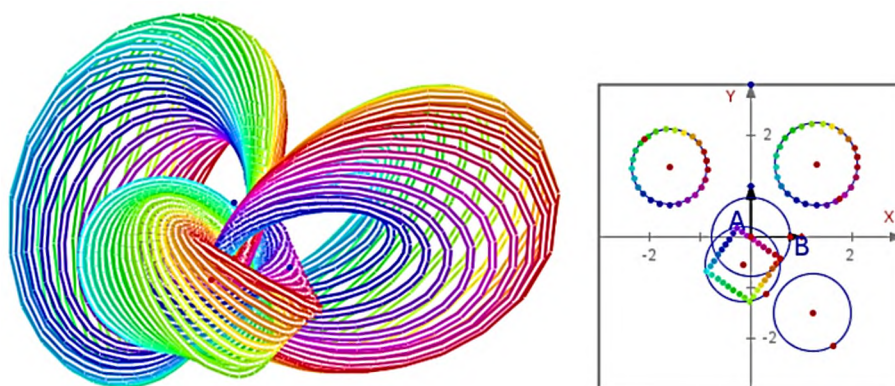


圖十八：兩層的霍普夫輪環面投影。

圖十九展示 4 個圓在不同位置時，形成四個兩兩鏈結的纖維輪環面投影圖。多邊形離原點愈遠，多邊形的折角現象就愈不清楚。圖二十可比較看出正方形的轉角扭曲集中在原點附近。



圖十九：三圓一方的纖維投影圖



圖二十：三圓一方的投影圖（比較方的位置）

【待 續】