

探索一類分式型不等式最小值問題(上)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前言

這是出自市立建國高級中學(2020 年)第 163 期通訊解題題目的[16302]題：

[16302] 已知 a, b, c 為正實數，且 $abc = 8$ ，求證： $\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) \geq 3$ 。

其提供的解答如下：

【證明】：因為 a, b, c 為正實數，所以 $\frac{b+c}{4} + \frac{a^2}{b+c} \geq 2\sqrt{\frac{b+c}{4} \cdot \frac{a^2}{b+c}} = a$ 。

同理 $\left(\frac{c+a}{4} + \frac{b^2}{c+a}\right) \geq b$ ， $\left(\frac{a+b}{4} + \frac{c^2}{a+b}\right) \geq c$ 。

將上述三式相加，得

$$\left(\frac{b+c}{4} + \frac{a^2}{b+c} + \frac{c+a}{4} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{a+b}{4} + \frac{c^2}{a+b}\right) \geq (a+b+c)，$$

$$\text{即 } \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) \geq \frac{a+b+c}{2}。$$

$$\text{又 } abc = 8，\text{ 所以由 } \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[3]{abc} = 3，$$

$$\text{故 } \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) \geq 3。$$

此解法乃採用放縮法；即要證明 $A \geq B$ ，可先證明 $A \geq C$ ，再證明 $C \geq B$ 。

使用此方法的關鍵，在於要設法找到一個適當的 C ，使 C 介於 A 、 B 之間並符合所需的不等式關係，從而得到 $A \geq B$ ，以完成證明。在解題中要找到一個適當的 C 之經驗靈感必來自於題目的已知條件，透過思考理解已知條件的內涵結構形式，再技巧性地提出以配形成適切的新中繼橋樑關係式 C ，來居間聯繫 A 與 B 的已知相對應關係。如上例的[證明]中，針對已知條件 $abc = 8$ ，就想到要組合成 $(a+b+c)$ 的相關函數形式 C 以建

立、聯繫不等式關係。對 $\frac{a^2}{b+c}$ 言；先巧思配形成 $\frac{b+c}{4} + \frac{a^2}{b+c} \geq 2\sqrt{\frac{b+c}{4} \cdot \frac{a^2}{b+c}} = a$ 等，再運

算成 $A = \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) \geq \frac{a+b+c}{2} = C$ ，以這新中繼橋樑式 $C = \frac{a+b+c}{2}$ ，

能使 $C = \frac{a+b+c}{2} \geq \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[3]{abc} = 3 = B$ ，因而證明了 $\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) \geq 3$ 。

至於何以選出 $\frac{b+c}{4}$ 與 $\frac{a^2}{b+c}$ 相配型運算成 $\frac{b+c}{4} + \frac{a^2}{b+c} \geq 2\sqrt{\frac{b+c}{4} \cdot \frac{a^2}{b+c}} = a$ 形式，主題內文中會提出完整的論述佐證。

本文對[16302]題以不等式概念提出不同解法，並擴充其分式型態，應用熟悉的算術幾何平均不等式、柯西不等式、局部不等式、函數的極值等觀念性質詳細分析，再推廣至其他類似型分式不等式且又驗證其結果，透過多種異樣化解題演練藉以助益腦海內在思考網絡的綿密連結力，更提升寬廣分析思路，使增強靈活解題的效力。整體的思維模式與推演運算流程盡在下文呈現。

貳、本 文

一、預備知識--數學性質

在理論推演流程中需應用到下列函數的極大值性質，以延續演繹完整性；

[性質1]：若 β, ω, x, δ 為正實數，且正整數 $m > \delta$ ，則函數

$$f(x) = \frac{\beta \cdot x^{m-\delta} - \omega}{x^m} \text{ 在 } x = {}^{m-\delta}\sqrt{\frac{m\omega}{\delta\beta}} \text{ 時有極大值 } M = \frac{\beta(m-\delta)}{m} \cdot {}^{m-\delta}\sqrt{\left(\frac{\delta\beta}{m\omega}\right)^\delta}。$$

證明：由 $f'(x) = \frac{(m-\delta) \cdot \beta \cdot x^{m-\delta-1} \cdot x^m - m \cdot x^{m-1} \cdot (\beta \cdot x^{m-\delta} - \omega)}{x^{2m}} = \frac{-\delta\beta \cdot x^{2m-\delta-1} + m\omega \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = 0$

$\Rightarrow -\delta\beta \cdot x^{2m-\delta-1} + m\omega \cdot x^{m-1} = 0$ 。因 $x > 0$ ， $m > \delta$ ， m 為正整數，

可得 $\delta\beta \cdot x^{m-\delta} = m\omega$ ，即 $x = {}^{m-\delta}\sqrt{\frac{m\omega}{\delta\beta}} = x_0 > 0$ (x_0 為出現極值位置處)。

再由 $f'(x) = \frac{-\delta\beta \cdot x^{2m-\delta-1} + m\omega \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-\delta\beta \cdot x^{m-\delta} + m\omega}{x^{m+1}}$ ，作微分運算，得

$$f''(x) = \frac{-(m-\delta) \cdot \delta\beta \cdot x^{m-\delta-1} \cdot x^{m+1} - (m+1) \cdot x^m \cdot (-\delta\beta \cdot x^{m-\delta} + m\omega)}{x^{2(m+1)}}$$

$$= \frac{(\delta+1)\delta\beta \cdot x^{2m-\delta-(m+1)m\omega \cdot x^m}}{x^{2(m+1)}}。$$

將 x_0 解出的數值代入 $f''(x)$ 函數中，得

$$f''(x_0) = \frac{(\delta+1)\delta\beta \cdot x_0^{2m-\delta-(m+1)m\omega \cdot x_0^m}}{x_0^{2(m+1)}} = \frac{(\delta+1)m\omega \cdot x_0^m - (m+1)m\omega \cdot x_0^m}{x_0^{2(m+1)}}，$$

因 $m > \delta$ ，得 $(\delta+1)m\omega \cdot x_0^m - (m+1)m\omega \cdot x_0^m < 0$ ，所以， $f''(x_0) < 0$ ，
因此，

$$\text{函數 } f(x) = \frac{\beta \cdot x^{m-\delta-\omega}}{x^m} \text{ 有極大值 } M = \frac{\beta(m-\delta)}{m} \cdot {}^{m-\delta}\sqrt{\left(\frac{\delta\beta}{m\omega}\right)^\delta}，$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{\beta \cdot x^{m-\delta-\omega}}{x^m} \leq \frac{\beta(m-\delta)}{m} \cdot {}^{m-\delta}\sqrt{\left(\frac{\delta\beta}{m\omega}\right)^\delta}，$$

等號成立若且唯若 $x = {}^{m-\delta}\sqrt{\frac{m\omega}{\delta\beta}}$ 時，完成以上證明流程。

[性質2]：若 β, ω, x 為正實數，且正整數 $m \geq 3$ ，則函數

$$g(x) = \beta \cdot x^{\frac{m(m-2)}{m-1}} - \omega \cdot x^m \text{ 在 } x = \left(\frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega}\right)^{\frac{m-1}{m}} \text{ 時有極大值}$$

$$M = \beta \cdot \left(\frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega}\right)^{m-2} - \omega \cdot \left(\frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega}\right)^{m-1}。$$

證明：由 $g'(x) = \frac{m(m-2)}{m-1} \cdot \beta \cdot x^{\frac{m(m-2)}{m-1}-1} - m\omega \cdot x^{m-1} = 0$ 且因為 $\frac{m(m-2)}{m-1} - 1$

$$= \frac{m^2-3m+1}{m-1} = (m-2) - \frac{1}{m-1} < (m-1)，$$

比較出 $x^{\frac{m(m-2)}{m-1}-1}$ 與 x^{m-1} 兩項次數的結果，得 $\frac{m(m-2)}{m-1} \cdot \beta = m\omega \cdot x^{\frac{m}{m-1}}$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega}\right)^{\frac{m-1}{m}} = x_0 > 0。$$

再由 $g''(x) = \left(\frac{m(m-2)}{m-1} - 1\right) \cdot \frac{m(m-2)}{m-1} \cdot \beta \cdot x^{\frac{m(m-2)}{m-1}-2} - (m-1)m\omega \cdot x^{m-2}$

$$\Rightarrow g''(x_0) = \left(\frac{m(m-2)}{m-1} - 1\right) \cdot \frac{m(m-2)}{m-1} \cdot \beta \cdot x_0^{\frac{m(m-2)}{m-1}-2} - (m-1)m\omega \cdot x_0^{m-2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{m(m-2)}{m-1} - 1 \right) \cdot m\omega \cdot x_0^{\frac{m}{m-1}} \cdot x_0^{\frac{m(m-2)}{m-1}-2} - (m-1)m\omega \cdot x_0^{m-2} \\
 &= \left(\frac{m(m-2)}{m-1} - 1 \right) \cdot m\omega \cdot x_0^{m-2} - (m-1)m\omega \cdot x_0^{m-2} \\
 &= \left(-1 - \frac{1}{m-1} \right) \cdot m\omega \cdot x_0^{m-2} < 0 \quad .
 \end{aligned}$$

因此，驗證得出；函數 $g(x)$ 有極大值 $M = \beta \cdot \left(\frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega} \right)^{m-2} - \omega \cdot \left(\frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega} \right)^{m-1}$ 。

即 $g(x) = \beta \cdot x^{\frac{m(m-2)}{m-1}} - \omega \cdot x^m \leq \beta \cdot \left(\frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega} \right)^{m-2} - \omega \cdot \left(\frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega} \right)^{m-1}$ ，等號成

立若且唯若 $x = \left(\frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega} \right)^{\frac{m-1}{m}}$ 時，證明完成。

[性質3]：若 β, ω, u 為正實數，且正整數 $m \geq 4$ ，則函數

$$\begin{aligned}
 I(u) &= \beta \cdot u^{\frac{m(m-3)}{m-1}} - \omega \cdot u^m \text{ 在 } u = \left(\frac{m-3}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega} \right)^{\frac{m-1}{2m}} \text{ 時有極大值} \\
 M &= \left(\frac{2\omega}{m-3} \right) \cdot \left(\frac{m-3}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega} \right)^{\frac{m-1}{2}} \quad .
 \end{aligned}$$

證明：由 $I'(u) = \left(\frac{m(m-3)}{m-1} \right) \cdot \beta \cdot u^{\frac{m(m-3)}{m-1}-1} - m\omega \cdot u^{m-1}$ ，

$$\text{令 } I'(u_0) = 0 \Rightarrow \left(\frac{m(m-3)}{m-1} \right) \cdot \beta \cdot u_0^{\frac{m(m-3)}{m-1}-1} = m\omega \cdot u_0^{m-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m-3}{m-1} \right) \cdot \beta \cdot u_0^{\frac{m(m-3)}{m-1}} = \omega \cdot u_0^m$$

$$\Rightarrow u_0 = \left(\frac{m-3}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega} \right)^{\frac{m-1}{2m}} \quad (u_0 \text{ 為出現極值位置處})。$$

再由 $I''(u) = \left[\frac{m(m-3)}{m-1} - 1 \right] \cdot \left(\frac{m(m-3)}{m-1} \right) \cdot \beta \cdot u^{\frac{m(m-3)}{m-1}-2} - m(m-1)\omega \cdot u^{m-2}$

$$\text{得 } I''(u_0) = \left[\frac{m(m-3)}{m-1} - 1 \right] \cdot m\omega \cdot u_0^{m-2} - m(m-1)\omega \cdot u_0^{m-2}$$

$$= (-2m) \cdot m\omega \cdot u_0^{m-2} < 0$$

$$\Rightarrow I(u) \text{ 有極大值 } I(u_0) \quad .$$

$$I(u_0) = M = \left(\frac{m-1}{m-3} - 1\right) \cdot \omega \cdot u_0^m = \left(\frac{2}{m-3}\right) \cdot \omega \cdot u_0^m = \left(\frac{2\omega}{m-3}\right) \cdot \left(\frac{m-3}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega}\right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

$$\text{即 } I(u) = \beta \cdot u^{\frac{m(m-3)}{m-1}} - \omega \cdot u^m \leq \left(\frac{2\omega}{m-3}\right) \cdot \left(\frac{m-3}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega}\right)^{\frac{m-1}{2}},$$

等號成立若且唯若 $u = \left(\frac{m-3}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega}\right)^{\frac{m-1}{2m}}$ 時，證明完成。

[性質 4]：若 $\beta, \omega, \varphi, x$ 為正實數，正整數 $m > \varphi$ ，且 $m \geq 2$ ，則函數

$$h(x) = \beta \cdot x^{m-\varphi} - \omega \cdot x^m \text{ 在 } x = \left[\left(\frac{m-\varphi}{m\omega}\right) \cdot \beta\right]^{\frac{1}{\varphi}} \text{ 時有極大值}$$

$$M = \beta \cdot \left[\left(\frac{m-\varphi}{m\omega}\right) \cdot \beta\right]^{\frac{m-\varphi}{\varphi}} - \omega \cdot \left[\left(\frac{m-\varphi}{m\omega}\right) \cdot \beta\right]^{\frac{m}{\varphi}}.$$

證明：由 $h'(x) = (m-\varphi) \cdot \beta \cdot x^{m-\varphi-1} - m \cdot \omega \cdot x^{m-1}$

$$\Rightarrow h'(x_0) = (m-\varphi) \cdot \beta \cdot x_0^{m-\varphi-1} - m \cdot \omega \cdot x_0^{m-1} = 0$$

$$\Rightarrow (m-\varphi) \cdot \beta = m \cdot \omega \cdot x_0^\varphi \quad \Rightarrow \quad x_0 = \left[\left(\frac{m-\varphi}{m\omega}\right) \cdot \beta\right]^{\frac{1}{\varphi}}.$$

再由 $h''(x) = (m-\varphi) \cdot (m-\varphi-1) \cdot \beta \cdot x^{m-\varphi-2} - m \cdot \omega \cdot (m-1) \cdot x^{m-2}$,

$$\begin{aligned} \text{得 } h''(x_0) &= (m-\varphi) \cdot (m-\varphi-1) \cdot \beta \cdot x_0^{m-\varphi-2} - m \cdot \omega \cdot (m-1) \cdot x_0^{m-2} \\ &= m \cdot \omega \cdot (m-\varphi-1) \cdot x_0^{m-2} - m \cdot \omega \cdot (m-1) \cdot x_0^{m-2} \\ &= m \cdot \omega \cdot x_0^{m-2} \cdot (-\varphi) < 0 \end{aligned}$$

因而驗證出：函數 $h(x)$ 有極大值 $M = \beta \cdot \left[\left(\frac{m-\varphi}{m\omega}\right) \cdot \beta\right]^{\frac{m-\varphi}{\varphi}} - \omega \cdot \left[\left(\frac{m-\varphi}{m\omega}\right) \cdot \beta\right]^{\frac{m}{\varphi}}$ 。

$$\text{即 } h(x) = \beta \cdot x^{m-\varphi} - \omega \cdot x^m \leq \beta \cdot \left[\left(\frac{m-\varphi}{m\omega}\right) \cdot \beta\right]^{\frac{m-\varphi}{\varphi}} - \omega \cdot \left[\left(\frac{m-\varphi}{m\omega}\right) \cdot \beta\right]^{\frac{m}{\varphi}}$$

，等號成立若且唯若 $x = \left[\left(\frac{m-\varphi}{m\omega}\right) \cdot \beta\right]^{\frac{1}{\varphi}}$ 時，證明完成。

[性質 5]：排序不等式 (arrangement inequality)

設有兩組實數有序數列 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 及 $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ ，則

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ (順序和)

$\geq a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \cdots + a_n b_{j_n}$ (亂序和)

$\geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$ (逆序和)

其中 $j1, j2, \dots, jn$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的任一排序。等號成立若且唯若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 。

證明：略。(參考文獻[1])

應用上述的 5 性質開始作主題內容的推理演繹論述，詳情如下：

二、主題的探索

A. 若 a, b, c 為正實數，且 $abc = 8$ ，則 $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq 3$ 。

[解]：應用柯西不等式： $(\sum_{i=1}^n x_i^2) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2$
並配合「先證明 $A \geq C$ ，再證明 $C \geq B$ 的放縮法 (method of stretching)」作出

$$[(b+c)+(c+a)+(a+b)] \cdot \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c) \cdot \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \geq \frac{a+b+c}{2} \quad \text{找到} \quad \frac{a+b+c}{2} = C,$$

接著應用算術幾何平均不等式及 $abc = 8$ ，由 $\left(\frac{a+b+c}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[3]{abc} = 3$ ，

$$\text{得} \quad \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq 3。$$

等號成立若且唯若 $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}$ ，即當 $a = b = c = 2$ 時有最小值 3。

[A1]. 仿效問題 [16302]，考慮其分母只有 1 變數；

已知 a, b 為正實數，且 $ab = k$ ，則 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{2}{1}\sqrt{k}$ 。

[解]：由算術幾何平均不等式與 $ab = k$ ，得

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{a}} = 2\sqrt{ab} = \frac{2}{1}\sqrt{k} \quad , \text{所以} \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{2}{1}\sqrt{k}。$$

[另解]：應用柯西不等式；有 $(b+a) \cdot \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \right) \geq (a+b)^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \right) \geq a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{k} = \frac{2}{1}\sqrt{k} \quad .$$

等號成立若且唯若 $a = b = \sqrt{k}$ 時，有最小值 $2\sqrt{k}$ 。

[A2]. 擴充成分母有 3 變數情形；已知 a, b, c, d 為正實數，且 $abcd = k$ ，

$$\text{則 } \frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}\sqrt[4]{k} \quad .$$

[解]：由算術幾何平均不等式，對各項分式逐一作運算，作出

$$\frac{b+c+d}{9} + \frac{a^2}{b+c+d} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{9}} = \frac{2a}{3} \quad . \text{同理，有 } \frac{c+d+a}{9} + \frac{b^2}{c+d+a} \geq \frac{2b}{3} \quad ,$$

$$\frac{d+a+b}{9} + \frac{c^2}{d+a+b} \geq \frac{2c}{3} \quad , \quad \frac{a+b+c}{9} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{2d}{3} \quad .$$

將上述四式相加，化簡，得

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}(a+b+c+d) \quad .$$

$$\text{再由 } a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd} = 4\sqrt[4]{k} \quad ,$$

$$\text{最後得 } \frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}\sqrt[4]{k} \quad .$$

[另解]：應用柯西不等式；首先作出

$$\left[(b+c+d) + (c+d+a) + (d+a+b) + (a+b+c) \right] \cdot \left(\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \right) \geq (a+b+c+d)^2 \quad ,$$

$$\text{再化簡，得 } \frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}(a+b+c+d) \quad ,$$

$$\text{最後再得 } \frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}\sqrt[4]{k} \quad .$$

等號成立若且唯若 $a = b = c = d = \sqrt[4]{k}$ 時，有最小值 $\frac{4}{3}\sqrt[4]{k}$ 。

[A3]. 擴充成分母有 n 變數的一般化情形；

已知 a_i 為正實數， $i=1,2,3, \dots, n, n+1$ ，且 $\prod_{i=1}^{n+1} a_i = k$ ，

$$\text{則 } \frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \geq \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot {}^{n+1}\sqrt{k} \quad .$$

[解]：由算術幾何平均不等式與 $\prod_{i=1}^{n+1} a_i = k$ ，對各項分式逐一作運算，首先作出

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n^2} + \frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}} \geq 2\sqrt{\frac{a_1^2}{n^2}} = \frac{2a_1}{n} \quad .$$

$$\text{同理，有 } \frac{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1}{n^2} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} \geq 2\sqrt{\frac{a_2^2}{n^2}} = \frac{2a_2}{n} \quad , \dots\dots ,$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^2} + \frac{a_{n+1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \geq 2\sqrt{\frac{a_{n+1}^2}{n^2}} = \frac{2a_{n+1}}{n} \quad .$$

將上述 $n+1$ 式相加，得

$$\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) + \left(\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right) \geq \left(\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)$$

運算化簡，得

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \geq \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \quad .$$

$$\text{再由 } \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_i \geq \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot {}^{n+1}\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot {}^{n+1}\sqrt{k} \quad ,$$

最後再得

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \geq \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot {}^{n+1}\sqrt{k} \quad .$$

等號成立若且唯若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1} = {}^{n+1}\sqrt{k}$ 時，有最小值。

[另解]：應用柯西不等式；(仿效前述運算過程，省略之。)

[A4]. 檢驗[A3]節的最小值上限

[解]：在[A3]節內如何選定 n^2 形式來搭配算術幾何平均不等式以求出最小值？嚴格來說，應該是要推求到最小值的上限；找出同系列最小值的最大者。這不妨先將問題參數化，接著找尋這些參數的函數最大值。因此，

$$(1). \text{ 設參數 } x > 0, \text{ 使 } \frac{a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}}{x^2} + \frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}} \geq 2\sqrt{\frac{a_1^2}{x^2}} = \frac{2a_1}{x} \quad .$$

同理，有 $\frac{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1}{x^2} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} \geq 2\sqrt{\frac{a_2^2}{x^2}} = \frac{2a_2}{x}$ ，……，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{x^2} + \frac{a_{n+1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \geq 2\sqrt{\frac{a_{n+1}^2}{x^2}} = \frac{2a_{n+1}}{x}。$$

將上述 $n+1$ 式相加，得

$$\left(\frac{n}{x^2} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) + \left(\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right) \geq \left(\frac{2}{x} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)。$$

運算並化簡，得

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \geq \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{n}{x^2}\right)。$$

(2). 考慮函數 $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{n}{x^2} = \frac{2x-n}{x^2}$ ，求出它的極值；引用[性質 1]證明如下；

由 $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x(2x-n) = 0$ ，得 $x = n$ ，故 $\max f(x) = \frac{1}{n}$ 。

再因 $f''(x) = \frac{4x^3-6nx^2}{x^6} \Rightarrow f''(n) = \left(\frac{-2}{n^3}\right) < 0$ ， $\max f(x) = \frac{1}{n} = f(n)$ ，

又因 $f(0^+) < f\left(\frac{n}{2}\right) < f(n-2) < f(n)$ 且 $f(n) > f(n+1) > \cdots > f(\infty)$

，得 $f(x) \leq f(n)$ ，即 $\max f(x) = \frac{1}{n}$ 是函數 $f(x)$ 全域 ($x > 0$) 最大值。因

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \geq \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \cdot f(x)，對$$

$f(x)$ 的函數值而言，不論對 f 取多少數值不等式必成立；以最佳化觀點因而選定了 $x = n$ ，

$\max f(x) = \frac{1}{n} = f(n)$ ，必使得下列不等式成立；

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \geq \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \cdot f(n)，$$

因而得以 n^2 形式來搭配算術幾何平均不等式以求得最小值的上限。

(3). 由 $\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \cdot \max\left(\frac{2}{x} - \frac{n}{x^2}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \cdot \frac{1}{n} \geq \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot {}^{n+1}\sqrt{k} \Rightarrow$

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \geq \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot {}^{n+1}\sqrt{k}。$$

等號成立若且唯若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1} = \sqrt[n+1]{k}$ 時。完成驗證。

※對照前言的問題 [16302]，分母是 2 變數情形，取 $x = n = 2$ 時，得其解法。

B. 對 A 型問題，換個方式，考慮選取分子為 1 次方的類型，情形如下：

已知 a_i 為正實數， $i=1,2,3, \dots, n, n+1$ ，

$$\text{則 } \frac{a_1}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = S \geq (?)。$$

[解]：應用柯西不等式；以適配型態作出下列不等式；

$$[(a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}) + (a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_1) + \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)] \cdot$$

$$\left[\frac{1}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{1}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \right] \geq (n+1)^2。$$

$$\text{取 } T = \frac{1}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{1}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$\Rightarrow [n \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1})] \cdot T \geq (n+1)^2$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}) \cdot T \geq \frac{(n+1)^2}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{a_1}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}\right) + \left(1 + \frac{a_2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right) \geq \frac{(n+1)^2}{n}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right) \geq \frac{(n+1)^2}{n} - (n+1)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right) = S \geq \frac{n+1}{n}。$$

等號成立若且唯若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$ 時， S 有最小值 $\frac{n+1}{n}$ 。

此類型不等式最小值證明的結果只與變數的個數 $n+1$ 有關，與變數數值無關。

[另解]：應用[性質5]的排序不等式法，因為此不等式是循環對稱的，可先假設 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1}$ ，則有

$$\frac{1}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} \leq \frac{1}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} \leq \cdots \leq \frac{1}{a_{n+1}+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} \leq \frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

以排序不等式法可得下列 n 組不等式：

$$S \geq \frac{a_1}{a_3+a_4+\cdots+a_{n+1}+a_1} + \frac{a_2}{a_4+a_5+\cdots+a_{n+1}+a_1+a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} + \frac{a_{n+1}}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}},$$

$$S \geq \frac{a_1}{a_4+a_5+\cdots+a_{n+1}+a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_5+\cdots+a_{n+1}+a_1+a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n} + \frac{a_n}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_3+a_4+\cdots+a_{n+1}+a_1},$$

$$S \geq \frac{a_1}{a_5+\cdots+a_{n+1}+a_1+a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_6+\cdots+a_{n+1}+a_1+a_2+a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_{n-2}}{a_1+a_2+\cdots+a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_n}{a_3+a_4+\cdots+a_{n+1}+a_1} + \frac{a_{n+1}}{a_4+a_5+\cdots+a_{n+1}+a_1+a_2},$$

⋮
⋮

$$S \geq \frac{a_1}{a_n+a_{n+1}+a_1+\cdots+a_{n-2}} + \frac{a_2}{a_{n+1}+a_1+\cdots+a_{n-1}} + \frac{a_3}{a_1+a_2+\cdots+a_n} + \frac{a_4}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_5}{a_3+a_4+\cdots+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-2}+\cdots+a_{n+1}+a_1+\cdots+a_{n-4}} + \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}+\cdots+a_{n+1}+a_1+\cdots+a_{n-3}},$$

$$S \geq \frac{a_1}{a_{n+1}+a_1+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}} + \frac{a_2}{a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n} + \frac{a_3}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_4}{a_3+a_4+\cdots+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}+\cdots+a_{n+1}+a_1+\cdots+a_{n-3}} + \frac{a_{n+1}}{a_n+a_{n+1}+a_1+\cdots+a_{n-2}},$$

$$S \geq \frac{a_1}{a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n} + \frac{a_2}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_3}{a_3+a_4+\cdots+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_n+a_{n+1}+a_1+\cdots+a_{n-2}} + \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+a_1+\cdots+a_{n-1}}.$$

將以上 n 組不等式全部相加後，看到右側粗體字(線上下載電子檔為紫色)的 n 項相加起來恰為 1，斜體字的(線上下載電子檔為藍色) n 項相加起來恰為 1，粗斜體(線上下載電子檔為紅色)的 n 項相加起來恰為 1， $\dots$ ，以此類推，仔細比對不等式右側整體 $n(n+1)$ 項相加的結果，發現恰有 $n+1$ 組的各組對應 n 項相加的和都為 1，如此，不等式右側的總和恰為 $n+1$ ，而左側的總和為 $n \cdot S$ ，得

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = S \geq \frac{n+1}{n} \quad .$$

等號成立若且唯若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$ 時， S 有最小值 $\frac{n+1}{n}$ 。

C. 對 A 型問題，考慮選取分子為 3 次方的類型，其 $n+1$ 項組合情形如下：

已知 a_i 為正實數， $i=1,2,3,\dots,n,n+1$ ，且 $\prod_{i=1}^{n+1} a_i = k$ ，

則 $\frac{a_1^3}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}} + \frac{a_2^3}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1} + \cdots + \frac{a_{n+1}^3}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = S_3 \geq (?)$ 。

[解]：採取配形成 3 項的算術幾何平均不等式；

(1). 對第 1 項 $\frac{a_1^3}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}$ 採納配形成 3 項，任取正參數 x, u ，以算術幾何平均不等

式，得下式 $\left(u^3 + \frac{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}{x^3} + \frac{a_1^3}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}\right) \geq 3 \frac{u \cdot a_1}{x}$ ，同理，還有 n 式，如：

$$\left(u^3 + \frac{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1}{x^3} + \frac{a_2^3}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}+a_1}\right) \geq 3 \frac{u \cdot a_2}{x}, \dots,$$

$\left(u^3 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{x^3} + \frac{a_{n+1}^3}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right) \geq 3 \cdot \frac{u \cdot a_{n+1}}{x}$ 等，將這些 $n+1$ 式相加，得 $\left[(n+1)u^3 + \frac{n(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})}{x^3} + S_3\right] \geq 3u \cdot \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{x} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} S_3 &\geq 3u \cdot \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{x} - \frac{n(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})}{x^3} - (n+1)u^3 \\ &= (\sum_{i=1}^{n+1} a_i) \cdot \left(\frac{3ux^2-n}{x^3}\right) - (n+1)u^3 \quad . \end{aligned}$$

令 $f(x) = \frac{3ux^2-n}{x^3}$ ，求出它的極值；引用[性質 1]證明，得極大值 M_3 如下；

對比[性質 1]函數 $f(x) = \frac{\beta \cdot x^{m-\delta} - \omega}{x^m}$ ，其中 $\beta = 3u$ ， $m = 3$ ， $\delta = 1$ ， $\omega = n$ ，

由極大值 $M = \frac{\beta(m-\delta)}{m} \cdot \frac{m-\delta}{\sqrt{\left(\frac{\delta\beta}{m\omega}\right)^\delta}} = 2u \cdot \sqrt{\frac{u}{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot u^{\frac{3}{2}} = M_3$ ，因此，有

$$S_3 \geq (\sum_{i=1}^{n+1} a_i) \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot u^{\frac{3}{2}} - (n+1)u^3 \geq (n+1) \cdot {}^{n+1}\sqrt{k} \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot u^{\frac{3}{2}} - (n+1)u^3$$

(2). 取函數 $g(u) = {}^{n+1}\sqrt{k} \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot u^{\frac{3}{2}} - u^3$ ，對照 [性質 2] 證明，由

$$g(x) = \beta \cdot x^{\frac{m(m-2)}{m-1}} - \omega \cdot x^m, \text{ 得 } x = u, \beta = {}^{n+1}\sqrt{k} \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}, m=3, \omega = 1,$$

$$\text{再由 } g(u) \text{ 極大值 } M = \beta \cdot \left(\frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega}\right)^{m-2} - \omega \cdot \left(\frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{\beta}{\omega}\right)^{m-1} = \frac{{}^{n+1}\sqrt{k^2}}{n} = M_3(u_0)$$

$$(3). \text{ 最後，由 } S_3 \geq (n+1) \cdot g(u) \geq \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot {}^{n+1}\sqrt{k^2}. \quad (1)$$

此(1)式中的 $\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot {}^{n+1}\sqrt{k^2}$ 是所有 S_3 的最小值上限。

此(1)式中等號成立若且唯若 $x = \left(\frac{n^2}{n+1}\sqrt{k}\right)^{\frac{1}{3}}$ ， $u = \left(\frac{{}^{n+1}\sqrt{k^2}}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$ 且 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$
 $= a_{n+1} = {}^{n+1}\sqrt{k}$ 時。其不等式 S_3 有最小值上限 $\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot {}^{n+1}\sqrt{k^2}$ 。

【待 續】