

四維空間霍普夫纖維化圖形探索在數學算板上的實踐(下)

林保平

前台北市立教育大學數資系退休副教授

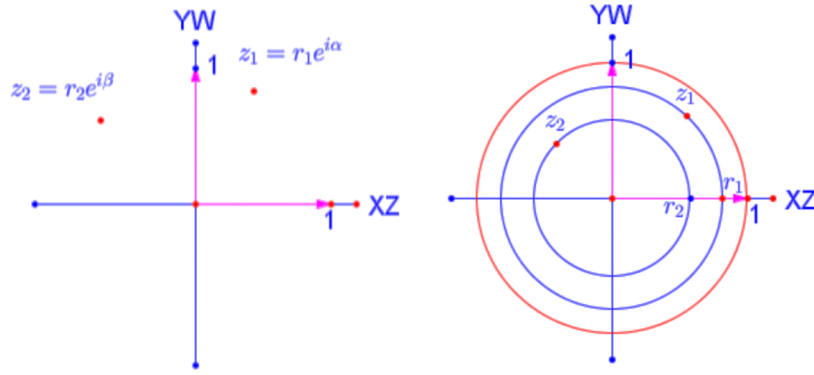
肆、旋轉纖維化

Zamboj (2021) 指出：霍普夫映射的定義，有透過四元素(quaternion)的旋轉定義 (Hanson,2006)，也有透過複分數比例 $f(z_1, z_2) = \frac{z_2}{z_1}$ 加以定義 (Hatcher 2002)。前面曾提到將霍普夫輪環面某一面相作「四維空間旋轉」後，得到的三維投影圖，其實也是該霍普夫輪環面的一個樣貌，本單元我們將透過「四維空間」的「等角旋轉」加以討論。

設 C 表示複數集合，考慮 $R^4 \cong C^2$ ，其上任一點可表示為 $(z_1, z_2) = (r_1 e^{i\alpha}, r_2 e^{i\beta})$ ，其中 $z_1 = x_0 + iy_0, z_2 = z_0 + iw_0, 0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$ ，

設 $X = [x_0, y_0, z_0, w_0] = [r_1 \cos(\alpha), r_1 \sin(\alpha), r_2 \cos(\beta), r_2 \sin(\beta)]$ 為 R^4 中的向量。數學算板定義一個四維空間為兩個重疊複數平面坐標軸的結構，其中 x 軸與 z 軸重疊， y 軸與 w 軸重疊， O 為原點，任意一組有序複數點對 (z_1, z_2) 代表四維空間上的一點，其中 z_1, z_2 分別在 XOY 及 ZOW 平面上，如圖 21 所示。圖 21 左圖中有序複數對 (z_1, z_2) 表示數學算板中四維空間坐標上的任意點， z_1, z_2 分別為 XOY 、 ZOW 平面上可任意移動的點。單位圓面 (disk) 上的點對 (z_1, z_2) ，當 $r_1^2 + r_2^2 = 1$ 時，就是 S^3 上的點。數學算板取 $r_1 \in [0,1]_x$ 為半自由點，可在 x 軸區間 $[0,1]$ 上移動， $r_2 = \sqrt{1-r_1^2} \in [0,1]_z$ 會隨 r_1 在 z 軸區間 $[0,1]$ 自動改變位置。 z_1, z_2 為以 O 為圓心

r_1, r_2 為半徑的圓上的半自由點 (兩圓分別在 XOY 、 ZOW 平面上)，可在圓上自由移動。因此在數學算板的四維空間系統中，單位圓面上數對 (z_1, z_2) ，在 $r_1^2 + r_2^2 = 1$ 時可代表數學算板上 $S^3 \subset R^4$ 上任一點。圖二十一右圖展示的點對 (z_1, z_2) 就是 S^3 上的點。由於 XOY 及 ZOW 平面重合，因此取點時，點在那一個平面上並不重要，重點是點對的順序。



圖二十一：左圖為四維空間的數對 (z_1, z_2) ，右圖為 S^3 上的數對 (z_1, z_2)

若考慮四維空間 XY 及 ZW 兩平面的等角旋轉(isoclinic rotation)矩陣

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ 這其實就是數學算板中四}$$

維旋轉 XY | ZW 選項（林，民 112），則

$$RX^t = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \cos(\theta) - y_0 \sin(\theta) \\ y_0 \cos(\theta) + x_0 \sin(\theta) \\ z_0 \cos(\theta) - w_0 \sin(\theta) \\ w_0 \cos(\theta) + z_0 \sin(\theta) \end{bmatrix} = \cos(\theta) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} + \sin(\theta) \begin{bmatrix} -y_0 \\ x_0 \\ -w_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

故若 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -y_0 \\ x_0 \\ -w_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ 為線性獨立向量（亦即 $y_0 \neq 0$ 或 $w_0 \neq 0$ ），則 RX^t 的端點都在向量

$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -y_0 \\ x_0 \\ -w_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ 拓展的平面上，亦即：若將 θ 視為參數，四維空間點 (z_1, z_2) 在等角旋轉

作用下，其軌跡圖形是在同一平面上。

從另一個方向來看，令

$$\begin{aligned}
 \mathbf{RX}^t &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \cos(\alpha) \\ r_1 \sin(\alpha) \\ r_2 \cos(\beta) \\ r_2 \sin(\beta) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} r_1 \cos(\theta) \cos(\alpha) - r_1 \sin(\theta) \sin(\alpha) \\ r_1 \sin(\theta) \cos(\alpha) + r_1 \cos(\theta) \sin(\alpha) \\ r_2 \cos(\theta) \cos(\beta) - r_2 \sin(\theta) \sin(\beta) \\ r_2 \sin(\theta) \cos(\beta) + r_2 \cos(\theta) \sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cos(\theta + \alpha) \\ r_1 \sin(\theta + \alpha) \\ r_2 \cos(\theta + \beta) \\ r_2 \sin(\theta + \beta) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

故 $\|\mathbf{RX}^t\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ ，將 θ 視為參數，因此四維空間點 (z_1, z_2) 在等角旋轉作用下，軌跡為一個以原點為圓心，半徑為 $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ 的圓。此圖作者稱之為「等角旋轉纖維」(Rotation Fiber)。我們將 $\mathbf{RX}^t$ 向量，做參數變換，令 $\theta + \beta = t \in [0, 2\pi]$, $\alpha - \beta = u \in [0, 2\pi]$ (取模數 2π)，結果記為 T_0 ，則

$$T_0 = \begin{bmatrix} r_1 \cos(t+u) \\ r_1 \sin(t+u) \\ r_2 \cos(t) \\ r_2 \sin(t) \end{bmatrix} \text{ 其中 } 0 \leq t, u \leq 2\pi.$$

若將 t 視為參數，此式為等角旋轉參數式。

若令 $r_1 = \cos(\frac{\varphi}{2})$, $r_2 = \sin(\frac{\varphi}{2})$ ， $0 \leq \varphi \leq \pi$ ，則 $0 \leq r_1, r_2 \leq 1$, $r_1^2 + r_2^2 = 1$ ，設

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\varphi}{2})\cos(\theta + \alpha) \\ \cos(\frac{\varphi}{2})\sin(\theta + \alpha) \\ \sin(\frac{\varphi}{2})\cos(\theta + \beta) \\ \sin(\frac{\varphi}{2})\sin(\theta + \beta) \end{bmatrix}, \text{ 其中 } 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \alpha, \beta, \theta \leq 2\pi.$$

由於 $\|T\|=1$ ，故四維空間向量 T 之端點為三維單位球面 S^3 (unit 3-sphere) 上的點。再作參數變換，令 $t = \theta + \beta, u = \alpha - \beta$ ，結果記為 T_1 ，則

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\varphi}{2})\cos(t + u) \\ \cos(\frac{\varphi}{2})\sin(t + u) \\ \sin(\frac{\varphi}{2})\cos(t) \\ \sin(\frac{\varphi}{2})\sin(t) \end{bmatrix}, \text{ 其中 } 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq t, u \leq 2\pi.$$

以 t 為參數，則向量 T_1 的端點軌跡就是 S^3 上的一個大圓。這個參數式就是前述霍普夫纖維化 (Hopf fibration) 中的纖維 (fiber) 曲線參數式。也就是說「霍普夫纖維化」其實可透過四維空間互相垂直平面 (XY 平面、ZW 平面) 中的「等角旋轉」加以實踐。設 $RF(z_1, z_2)$ 表示四維空間點 $(z_1, z_2) = (r_1 e^{i\alpha}, r_2 e^{i\beta})$ 形成的等角旋轉纖維，由於 t 是參數，由令 $t = 0$ 則

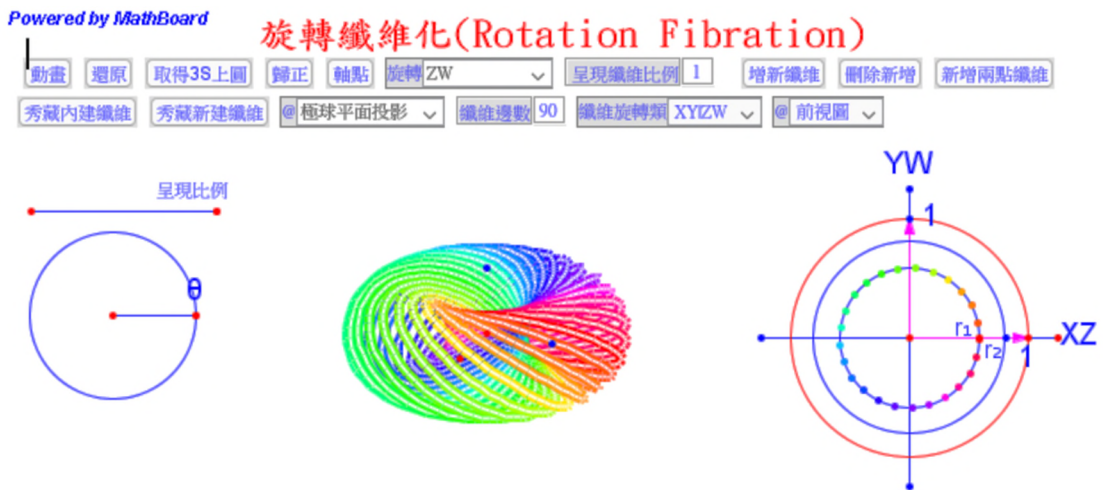
$$T_0(0) = \begin{bmatrix} r_1 \cos(u) \\ r_1 \sin(u) \\ r_2 \\ 0 \end{bmatrix}, T_1(0) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cos(u) \\ \cos(\varphi) \sin(u) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 前述參數變換之 } T_0, T_1, \text{ 讓我們得到下列}$$

結果：

$$\{RF(z_1, z_2) | (z_1, z_2) \in C \times C\} \cong \{RF(z_1, r_2) | z_1 = r_1 e^{it}, r_2 \geq 0\} \quad [1]$$

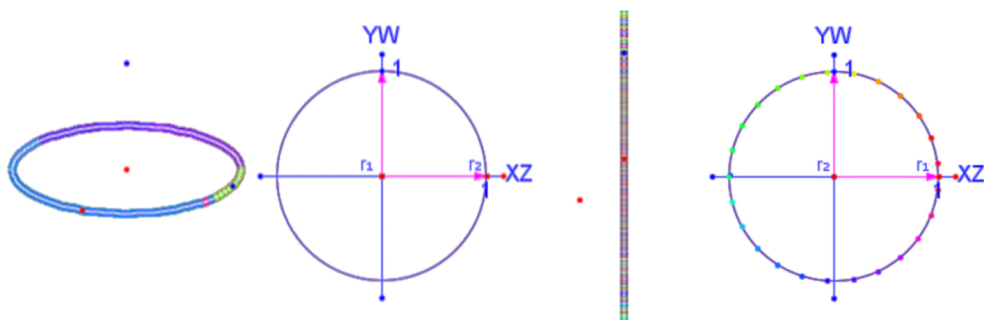
$$\{RF(z_1, z_2) | (z_1, z_2) \in S^3\} \cong \{RF(z_1, r_2) | z_1 = r_1 e^{it}, r_2 = \sqrt{1 - r_1^2}, 0 \leq r_1 \leq 1\} \quad [2]$$

[1]告訴我們，在數學算板的四維空間坐標系中，我們若想取得 R^4 上的點 (z_1, z_2) 的旋轉纖維，我們只需取得 (z_1, r_2) 的旋轉纖維即可。[2]告訴我們，若想取得 S^3 上的點 (z_1, z_2) 的旋轉纖維，我們只需取得 $(z_1, \sqrt{1-r_1^2})$ 的旋轉纖維即可。由[2]，在數學算板程式中，要取得 S^3 上的點上的點纖維，只需在四維空間坐標 XOY 平面單位圓面上，取得一點 z_1 即可。數學算板會自動補上其相應的 ZOW 平面 z 軸區間 $[0,1]$ 上的點，然後取得纖維。設取得的是 $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ ，令 $r_2 = \sqrt{1-r_1^2}$ ，取 $z_2 = r_2$ 即可。因此在數學算板四維空間坐標系「單位圓面」(unit disk)上的封閉曲線（可視為延伸複平面上的封閉曲線）上的點，透過取得的相應點，可得到對應的等角旋轉纖維化輪環面，亦即霍普夫纖維化輪環面。圖 22 展示的就是數學算板旋轉纖維化程式畫面維化輪環面。圖 22 展示的就是數學算板旋轉纖維化程式畫面。中間的圖形是半徑 r_1 圓上諸點，配合點 r_2 構成的許多數對，畫出的輪環面投影圖，其中 $0 < r_1 < 1$ 。由於 T 的諸點均在 S^3 ，前述圖形是以 S^3 上的 $(0,0,0,1)$ 為北極點作為透視中心，將前述 S^3 上的纖維（圓）群，極球平面投影至三維空間 XYZ 上。



圖二十二：旋轉纖維化程式起始畫面，當 $0 < r_1 < 1$ 時，纖維圖為輪環面

圖二十三展示的是當 $r_1 = 0$ （此時 $r_2 = 1$ ）及 $r_1 = 1$ （此時 $r_2 = 0$ ）時，輪環面變成一個圓及一條直線（圓的特殊狀況）。

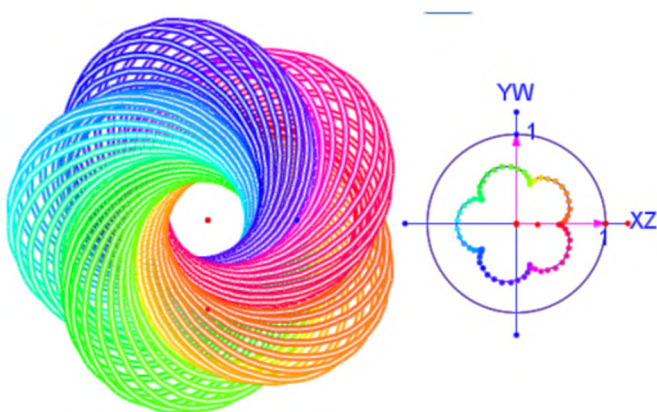


圖二十三：當 $r_1=0$ 及 $r_1=1$ 時，輪環面變成一個圓及一條直線

當 $r_1=r_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 時，圖二十二中兩圓重合，此時，投影圖形是特殊的克利福特輪環面（Clifford torus）投影。由於兩圓是配對的存在，因此在哪一個圓上取點都可以，數學算板會自動配合相應的點，以便構成四維點，形成旋轉纖維。

這個我們稱之為「等角旋轉纖維化」的作圖，與霍普夫纖維化作圖，本質上是相同的。只是後者我們是在 S^2 或延伸的複數平面上取點（一點）再作纖維（延伸複平面點是轉換成 S^2 的點再作纖維），而前者是在數學算板空間坐標系中的 S^3 上取點（兩點），第一個點必須取在單位圓面上。第二個點取在區間 $[0,1]$ 上。

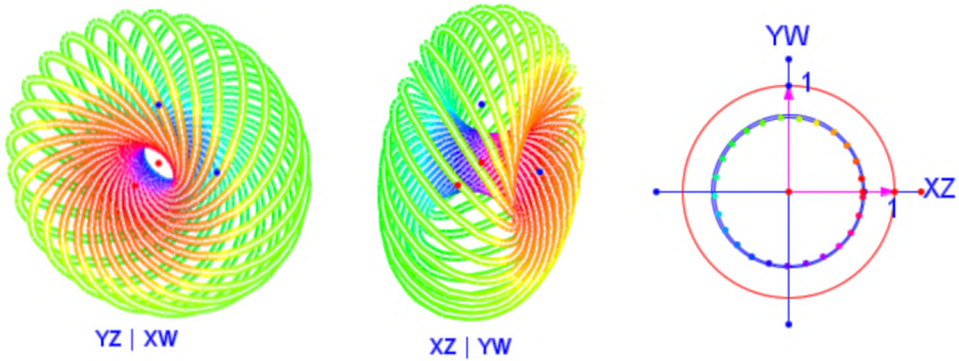
圖二十四展示的是旋轉纖維化 5 尖外擺線點纖維投影而得的圖形的上視圖，可與圖十五之二比較。



圖二十四：旋轉纖維化 5 尖外擺線點纖維投影圖

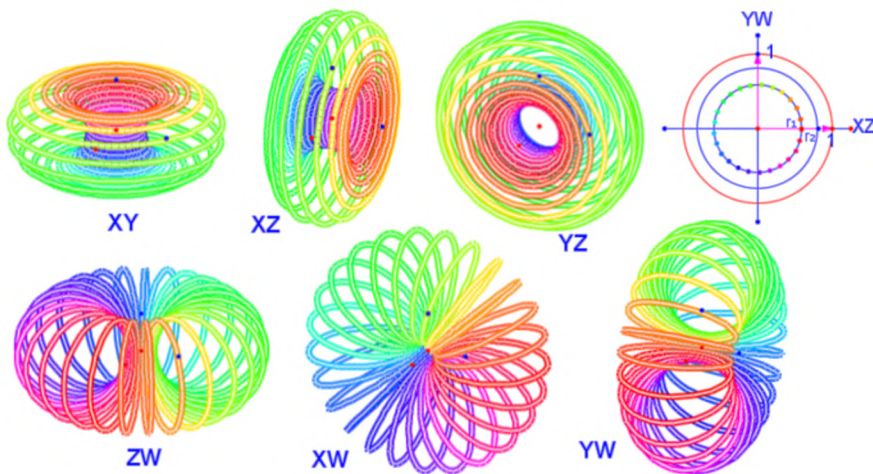
前面我們討論的等角旋轉是 $XY \mid ZW$ 旋轉矩陣在 $\alpha = \beta \neq 0$ 時的特例，其實對 $XZ \mid YW$ ， $YZ \mid XW$ 旋轉它也是成立的。此時數學算板中的重疊平面就是不同的坐標主平面。

圖 24-1 展示的就是 $XZ \mid YW$ 及 $YZ \mid XW$ 等角旋轉纖維對應的 3 維投影圖形，注意此時數學算板上重疊平面為 XOZ 、 YOW 平面及 YOZ 、 XOW 平面，前面圖二十二展示的是 $XY \mid ZW$ 的投影圖形，等角旋轉狀況下，內建的圓上諸點是設定在兩平面中任一個都可以。



圖二十四之一： $YZ \mid XW$ 及 $XZ \mid YW$ 對內建點旋轉纖維對應的 3 維投影圖

四維空間六個主旋轉 (XY, XZ, XW, YZ, YW, ZW) 雖然不是等角旋轉，由於四維空間點在這些主旋轉之下，仍然是圓，我們在數學算板的四維空間上，仍依前述取點方式取四維點，作旋轉纖維，此時的圖形也十分有趣。圖二十五展示的六個圖形就是取內建點（圖二十五右上方點）時，六個主旋轉纖維對應的 3 維投影圖形，呈現的是輪環面的經緯線，分別為與 W 軸無關的 (XY 、 XZ 、 YZ) 及與 W 軸相關的 (XW 、 YW 、 ZW) 兩類。注意此時數學算板四維坐標的重疊平面為分別為 (XOY 、 ZOW ; XOZ 、 YOW ; YOZ 、 XOW) 及 (XOW 、 YOZ ; YOW 、 XOZ ; ZOW 、 YOZ)，而內建的圓上諸點是設定在平面 ZOW 、 YOW 、 XOW 及 YOZ 、 XOZ 、 XOY 上。



圖二十五：六類主旋轉對內建點旋轉纖維對應的 3 維投影圖

數學算板提供了「旋轉纖維類」選鈕（圖二十二）。

其基本選項 $XY, XZ, YZ, ZW, XY | ZW, XW, XZ | YW, YW, YZ | XW$ 與四維旋轉選項相同，此時取得的四維點都在 S^3 上。

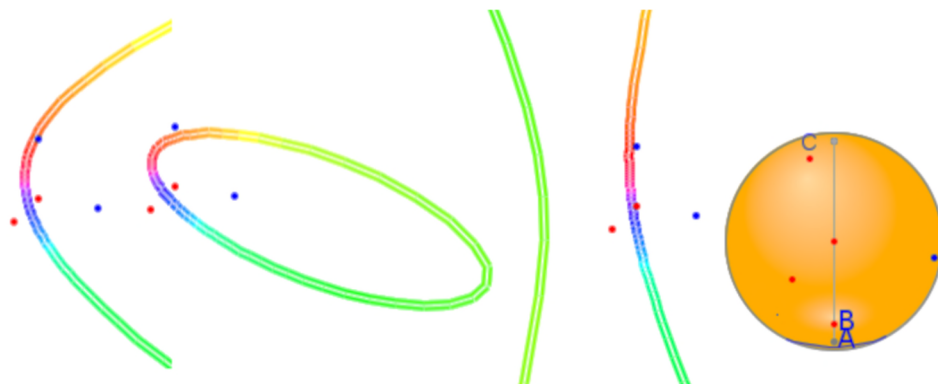
伍、四維空間任意點的等角旋轉纖維化

前面我們由[2]討論了 S^3 上點的旋轉纖維，四維空間坐標中單位圓面上的任意點，都可取對應的點使其成為 S^3 上的點，而取得旋轉纖維。回頭看 T_0 及[1]，以 t 為參數，因 $|T_0| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ ， T_0 是在 R^4 中以 $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ 為半徑的 3-球面上的大圓。我們若以 $(0,0,0,r)$ 為透視中心，作極球平面投影，此時的投影圖其實與前述 S^3 的圖形是等價的（只是大小不同而已）。四維空間中對於任意 XOY 平面上的封閉曲線，我們可以取夠大的 r ，使此封閉曲線在半徑為 r 的圓面上，對於封閉曲線上的點，都可找到 x 軸的區間 $[0,r]$ 上點，使此兩點構成的四維點，在半徑為 r 的 3-球面上而取得旋轉纖維，也就是說， R^4, S^3 上的「等角旋轉纖維化」是相似的。數學算板四維空間系統的單位點是半自由點，可在 x 軸正向自由移動，若封閉曲線範圍超出單位圓面，可適度動擴大單位圓面使其包含此封閉曲線（或透過相似變換，縮小封閉曲線）。

陸、一般透視投影與極球平面投影

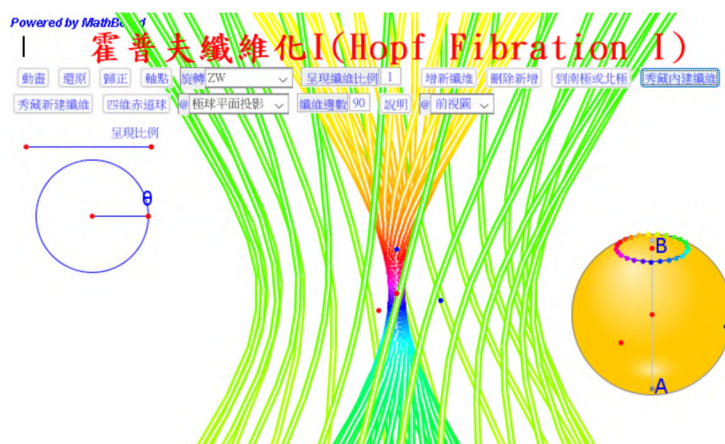
到目前為止，我們討論的都是 S^3 上的等角旋轉纖維（含霍普夫纖維）的投影圖，使用極球平面投影來展示。若我們不用極球平面投影，而將投影透視中心放在 S^3 內部或外部，此時，四維空間大圓投影至三維空間時，其投影圖形未必是圓，可能是其他圓錐曲線或其退化的情形。

圖二十六展示的就是黎曼球面上點以 $(0, 0, 0, r)$ 為投影中心的纖維投影圖。當點 $h^{-1}(C)$ 的 z 坐標大於 r 時，圖形是雙曲線，小於 r 時才會是圓，等於 r 時，應是拋物線。移動程式中的 C 點可以看到其圖形的變化，圖二十六中的 C 點是在圖形形成雙曲線時的位置。

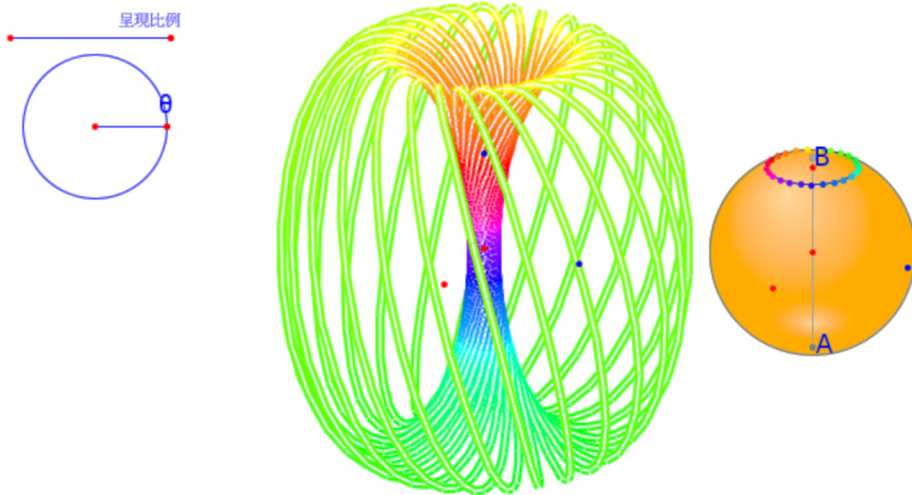


圖二十六：黎曼球面上點形成的 3 類纖維

圖二十七展示的是是程式內建圖形在以 $(0,0,0,0.9)$ 為透視中心時，緯線圓上點對應的纖維投影圖，像是雙層的雙曲線面。數學算板在展示雙曲纖維時，會消除一些雜訊線條，由於技術問題，有時仍會有線段雜訊出現，有待改善。圖二十八展示的是以 $(0,0,0,1.1)$ 為透視中心時，緯線圓上點對應的纖維投影圖。

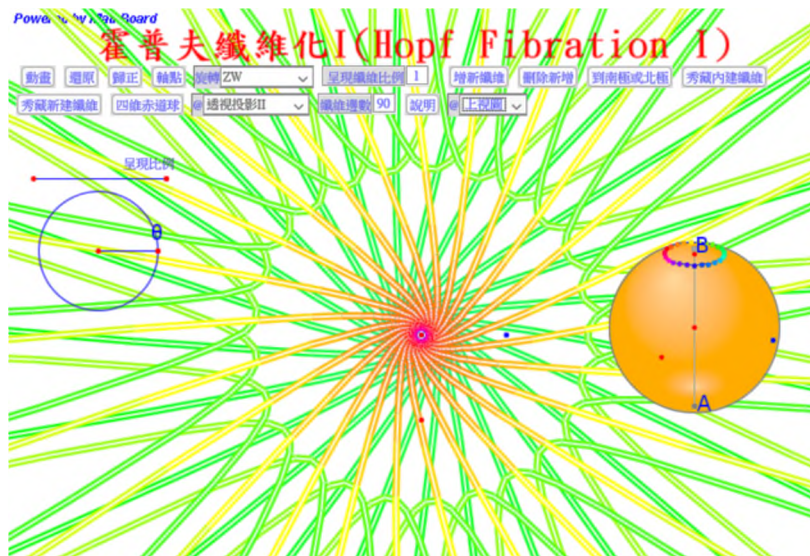


圖二十七：緯線圓上點在透視半徑為 0.9 時，纖維的投影圖。



圖二十八：緯線圖在透視半徑為 1.1 時，纖維的投影圖。

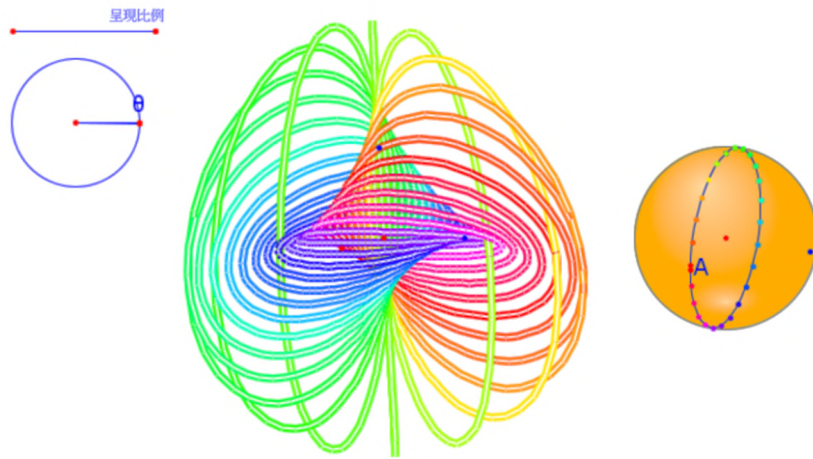
圖二十九展示的是圖二十七的上視圖。



圖二十九：圖二十七的上視圖

數學算板程式中有「極球平面投影」選擇輸入按鈕，有三個選項：極球平面投影($r=1$)、透視投影 I ($r=1.1$)，透視投影 II ($r=0.9$)。也可以直接輸入投影半徑的數值，觀察不同投影的投影圖形。本質上來說，極球平面投影是一對一映成對應，但一般透視投影在投影半徑大於 1 時，未必是一對一對應，投影時無法維持纖維在四維空間上的鏈結狀態，因此在四維旋轉之時，投影圖會有纖維圖相交的現象；投影半徑小於 1 時，有時會將圓裂為兩

條雙曲線。圖二十六、二十七、二十八展示的透視投影仍是 1 對 1 的對應，故並無投影圖相交的狀況。圖三十展示的是經線圓上點，以 $(0, 0, 0, 0.9)$ 為投影中心的透視投影，由於它不是 1 對 1 對應，投影圖形有自我相交狀況的狀況。至於四維空間中的多胞體，由於其構成成分中的線、面、胞上的點不會全部同在一個 3-球面上，因此其投影只能是一般的透視投影，而不是極球平面投影。



圖三十：經度為 0 的經線圓上點，其纖維在投影半徑為 0.9 時的投影圖

柒、結語

本文首先介紹四維空間霍普夫變換的定義及性質，並討論數學算板的黎曼球面及延伸複平面上的霍普變換的三維投影圖形製作，然後以「等角旋轉纖維化」透過四維空間坐標系來看霍普變換，雖然沒有嚴格的定理性質證明，但有大略的說明，最後說明極球平面投影與一般透視投影的差異。對於程式也提供了兩個影片，影片的目的是簡單介紹程式的功能，並非做數學的教學，影片說明有些口誤，未加修正，請留意，若有時間會再陸續製作。網頁 <https://mathboard.tw> 下載區上將提供數學算板測試版 1.07 版，對程式有興趣的讀者可下載測試使用，<https://www.youtube.com/@mathboardtw> 上也提供數學算板相關的影片，希望對霍普夫纖維化及數學算板有興趣的讀者有幫助。

參考文獻

- 林保平 (民 107) 多面體的生成及動態模型製作在數學算板上的實踐(上), 科學教育月刊, 第 412 期, pp31-49。
- 林保平 (民 112) 四維空間初探在數學算板中的實踐, 數學傳播季刊, 第 47 卷第 4 期, pp53-76。
- Banchoff, T.(1990). Beyond the third dimension: Geometry, computer graphics, and higher dimensions. Scientific American Library; W. H. Freeman and Company.
- Gluck,H.,Warner,F. and Ziller,W.(1986). The Geometry Of Hopf Fibration. L'Enseignement Mathématique 32(3) January 1986.
- <https://ncatlab.org/nlab/files/GluckWarnerZiller-HopfFibrations.pdf> .
- Hanson, A.J. (2006). Visualizing Quaternions. in IEEE Control Systems Magazine, vol. 28, no. 4, pp. 104-105, Aug. 2008, doi: 10.1109/MCS.2008.925869.
- Hatcher, A. (2002). Algebraic topology. Cambridge University Press.. PP377 Example4.45 define hopf by ratio of two complex.
- Hopf, Heinz.(1935). Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. Fundamenta Mathematicae (Warsaw: Polish Acad.)
- Pinkall,Ulrich.(1985). Hopf tori in S^3 . Inventiones mathematicae 81(2):379-386.
- Zamboj,Michal (2021). Synthetic construction of the Hopf fibration in a double orthogonal projection of 4-space, Journal of Computational Design and Engineering, 2021, 8(3), 836 – 854, <http://doi.org/10.1093/jcde/qwab018> .

【完】