

使用三角學的方法證明三道不等式

連威翔

Uber Eats 外送合作夥伴

壹、前言

在數學傳播季刊中同屬一位作者的[1],[2]兩篇文章的最後，作者丁遵標老師以兩文章所探討得到的主要結果搭配尤拉不等式 $R \geq 2r$ 後，分別推論得

$$\frac{a^2}{h_b^2 + h_c^2} + \frac{b^2}{h_c^2 + h_a^2} + \frac{c^2}{h_a^2 + h_b^2} \geq 2, \quad (1)$$

$$\prod \frac{a^2}{h_b^2 + h_c^2} \geq \frac{8}{27}, \quad (2)$$

其中 a, b, c 分別為 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊長度，而 h_a, h_b, h_c 分別是 $\triangle ABC$ 長度為 a, b, c 之三邊上的高， R, r 分別為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑與內切圓半徑。注意(2)式不等號左邊的寫法使用了迴圈積的符號 $\prod$ ，注意(2)式的原始寫法是

$$\frac{a^2}{h_b^2 + h_c^2} \times \frac{b^2}{h_c^2 + h_a^2} \times \frac{c^2}{h_a^2 + h_b^2} \geq \frac{8}{27}. \quad (3)$$

此外，在丁老師於數學傳播季刊所發表的另一篇大作[3]中，作者兩度提到不等式

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

的證明是容易的，但是並未寫下證明。

筆者對上面出自[1],[2],[3]三文的不等式(1),(3),(4)感到有興趣，並且試著找出它們的另證或證明。有趣的是，筆者研究過後發現(1),(3),(4)這三個不等式都可以利用同一個性質來證明，該性質如下：

性質 1： $\triangle ABC$ 三內角的正弦值滿足

$$0 < \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}. \quad (5)$$

在底下第二節中，筆者將先介紹性質 1 的證明，接著則會依序介紹如何使用包含性質 1 在內的三角學工具來證明(1),(3),(4)這三個不等式。

貳、三道不等式的證明

在介紹第一節性質 1 的證明之前，我們先看底下的性質及其證明：

性質 2： $\triangle ABC$ 三內角的餘弦值滿足

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1. \quad (6)$$

證明：由於三角形的內角和為 π ，利用餘弦補角性質與和角公式，我們可寫下

$$\cos C = \cos[\pi - (A + B)] = -\cos(A + B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B,$$

因此有

$$\cos C + \cos A \cos B = \sin A \sin B.$$

上式等號兩邊取平方後，可繼續推得下式：

$$\begin{aligned} \cos^2 C + \cos^2 A \cos^2 B + 2 \cos A \cos B \cos C &= \sin^2 A \sin^2 B = (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 B) \\ &= 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B) + \cos^2 A \cos^2 B, \end{aligned}$$

取上式的頭尾，化簡後可得

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1,$$

因此(6)式成立，性質 2 證明完畢。

有了性質 2 之後，接下來我們看性質 1 的證明如下：

證明：我們將分開證明(5)式右半邊與左半邊的條件成立。首先，注意(5)式的右半邊可改寫為等價的

$$3 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) \leq \frac{9}{4},$$

上式化簡後可得

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}. \quad (7)$$

利用性質 2 的恆等式(6)，若我們能證明

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}, \quad (8)$$

即可推得

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad (9)$$

因此(7)式成立，從而可反推得(5)式的右半邊成立，故接下來推論的重點將放在如何證明(8)式成立。由於三角形的三內角中至多只會有一個角是直角或鈍角，因此接下來我們可分成兩種情況進行討論以證明(8)式成立，討論如下：

(a) 若 $\triangle ABC$ 的三內角中恰有一個是直角或鈍角，不妨假設 $\angle A$ 為直角或鈍角，則 $\angle B, \angle C$ 為銳角，因此可知 $\cos A \leq 0, \cos B > 0, \cos C > 0$ ，這表示有

$$\cos A \cos B \cos C \leq 0 < \frac{1}{8},$$

因此在本情況下(8)式成立。

(b) 若 $\triangle ABC$ 的三內角均為銳角，則 $\cos A, \cos B, \cos C$ 均為正數，此時我們先利用餘弦定理寫下

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},\end{aligned}$$

則由上述三式可推得 $b^2 + c^2 - a^2, c^2 + a^2 - b^2, a^2 + b^2 - c^2$ 三數均正。將上述三式代入(8)式，可得

$$\frac{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{8a^2b^2c^2} \leq \frac{1}{8}, \quad (10)$$

上式經整理後可得與(8)式等價的下式：

$$(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) \leq a^2b^2c^2. \quad (11)$$

觀察上式後，我們令

$$S = b^2 + c^2 - a^2, \quad T = c^2 + a^2 - b^2, \quad U = a^2 + b^2 - c^2,$$

則可知在本情況下 S, T, U 三數均正，且此時有

$$\frac{T+U}{2} = a^2, \quad \frac{U+S}{2} = b^2, \quad \frac{S+T}{2} = c^2,$$

故我們可將(11)式改寫為

$$\frac{T+U}{2} \cdot \frac{U+S}{2} \cdot \frac{S+T}{2} \geq STU. \quad (12)$$

我們可利用算幾不等式來證明上式，過程如下：

$$\frac{T+U}{2} \cdot \frac{U+S}{2} \cdot \frac{S+T}{2} \geq \sqrt{TU} \cdot \sqrt{US} \cdot \sqrt{ST} = STU,$$

因此知(12)式成立，即(8)式也成立。

綜合以上(a),(b)兩情況的討論結果，可知對於任意的 $\triangle ABC$ 而言(8)式恆成立，從而可反推得(7)式與(5)式的右半邊成立。

另一方面，由於 $\triangle ABC$ 三內角的大小落在 $(0, \pi)$ 這個開區間內，因此知 $\sin A, \sin B, \sin C$ 三數均正，這就表示有

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 0,$$

因此(5)式的左半邊成立，此時再搭配上段的討論結果可知(5)式成立，至此性質 1 證明完畢。

完成性質 1 的證明後，接著筆者一口氣介紹(1),(3),(4)三式的證明，如下：

證明：為了證明(1),(3)兩式，請先參考下圖：

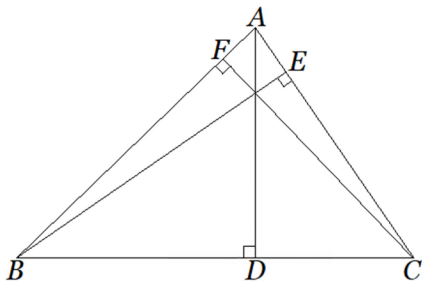


圖 1

上圖中 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 為 $\triangle ABC$ 的三高，對比在(1)式中所使用的符號，我們知道

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = a, \quad \overline{AB} = c, \\ \overline{AD} = h_a, \quad \overline{BE} = h_b, \quad \overline{CF} = h_c.$$

接著觀察圖 1 中的 $\triangle ABE, \triangle ACF, \triangle BCF, \triangle BAD, \triangle CAD, \triangle CBE$ 這六個直角三角形，可知

$$\sin A = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CA}}, \quad \sin B = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}, \quad \sin C = \frac{\overline{AD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}},$$

以(1)式中所用的符號將上述三式的右半邊改寫後，可得

$$\sin A = \frac{h_b}{c} = \frac{h_c}{b}, \quad \sin B = \frac{h_c}{a} = \frac{h_a}{c}, \quad \sin C = \frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a}.$$

利用上述三式，我們可將(1)式不等號左邊的式子改寫如下：

$$\begin{aligned} (1) \text{左式} &= \frac{1}{\left(\frac{h_b}{a}\right)^2 + \left(\frac{h_c}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{h_c}{b}\right)^2 + \left(\frac{h_a}{b}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{h_a}{c}\right)^2 + \left(\frac{h_b}{c}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sin^2 B + \sin^2 C} + \frac{1}{\sin^2 C + \sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A + \sin^2 B}, \end{aligned}$$

因此可知(1)式等價於下式：

$$\frac{1}{\sin^2 B + \sin^2 C} + \frac{1}{\sin^2 C + \sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A + \sin^2 B} \geq 2. \quad (13)$$

因為性質 1 所關心的(5)式成立，故我們可對(5)式右邊不等號兩側的表達式取倒數，藉此推得

$$\frac{1}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} \geq \frac{4}{9}. \quad (14)$$

接著令 $P = \sin^2 B + \sin^2 C, Q = \sin^2 C + \sin^2 A, R = \sin^2 A + \sin^2 B$ ，則可利用柯西不等式推得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sin^2 B + \sin^2 C} + \frac{1}{\sin^2 C + \sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A + \sin^2 B} \right) (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} \right) (P + Q + R) \geq \frac{1}{2} (1 + 1 + 1)^2 = \frac{9}{2}, \end{aligned}$$

以上式的推論結果搭配(14)式，即可推得

$$\frac{1}{\sin^2 B + \sin^2 C} + \frac{1}{\sin^2 C + \sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A + \sin^2 B} \geq \frac{9}{2} \times \frac{1}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} \geq \frac{9}{2} \times \frac{4}{9} = 2.$$

因此(13)式成立，故與其等價的(1)式成立。

接下來我們看(3)式的證明，回顧(13)式上方將(1)式改寫為(13)式的過程，同理可知我們可將(3)式改寫為與其等價的下式：

$$\frac{1}{\sin^2 B + \sin^2 C} \times \frac{1}{\sin^2 C + \sin^2 A} \times \frac{1}{\sin^2 A + \sin^2 B} \geq \frac{8}{27}. \quad (15)$$

為了證明上式，我們先利用算幾不等式搭配(5)式推得

$$\begin{aligned} & (\sin^2 B + \sin^2 C)(\sin^2 C + \sin^2 A)(\sin^2 A + \sin^2 B) \\ & \leq \left[\frac{(\sin^2 B + \sin^2 C) + (\sin^2 C + \sin^2 A) + (\sin^2 A + \sin^2 B)}{3} \right]^3 \\ & = \frac{8}{27} (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)^3 \leq \frac{8}{27} \times \left(\frac{9}{4} \right)^3 \\ & = \frac{27}{8}, \end{aligned} \quad (16)$$

注意上式最後的不等號用上了可由(5)式推得的下述條件：

$$(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)^3 \leq \left(\frac{9}{4} \right)^3.$$

接下來，由於 $\sin A, \sin B, \sin C$ 三數均正，我們有

$$(\sin^2 B + \sin^2 C)(\sin^2 C + \sin^2 A)(\sin^2 A + \sin^2 B) > 0,$$

因此取(16)式的頭尾再分別取倒數後，即可推得(15)式成立，從而可知與(15)式等價的(3)式成立。

透過上述搭配圖 1 所進行的討論完成(1),(3)兩式的證明後，現在我們準備證明(4)式。首先，對於 $\triangle ABC$ 三內角的正弦值我們令 $P = \sin A, Q = \sin B, R = \sin C$ ，則可利用柯西不等式推得

$$\begin{aligned} (\sin A + \sin B + \sin C)^2 &= (P + Q + R)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(P^2 + Q^2 + R^2) \\ &= 3(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \leq 3 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

由於 $\sin A + \sin B + \sin C > 0$ ，因此取上式頭尾的正平方根後可得

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

至此即可確定(4)式成立。而利用上式搭配算幾不等式，則可進一步證明

$$\sin A \sin B \sin C \leq \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \right)^3 \leq \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

注意[1]文在證明該篇文章中的(2)式時使用了上式的條件。

本節最後，我們不妨回顧[3]文。注意在[3]文中作者兩度提到 $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

即(4)式易證，筆者猜測[3]文作者可能是使用詹森不等式(Jensen's inequality)來完成證明。事實上，我們可搭配函數 $f(x) = \sin x$ 是凹函數(concave function)的條件，先利用詹森不等式寫下：對任意 $n = 1, 2, 3, \dots$ ，有

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right),$$

其中 $0 \leq \lambda_i \leq 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$)，且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 。特別地，對 $n = 3$ ，而 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ ，可得

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} = \frac{1}{3}f(A) + \frac{1}{3}f(B) + \frac{1}{3}f(C) \leq f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

取上式的頭尾並同乘 3 後，即得(4)式。至於詹森不等式(Jensen's inequality)的詳細介紹，讀者可參考[5]。

參、結語

本文只是簡單的心得分享，能夠完成本文，筆者要感謝[1],[2],[3]三文的作者丁遵標老師，因為有他在文章中介紹(1),(2),(4)三式的結果，筆者才有機會完成本文，此外也十分感謝審稿者對本文提出了許多有益的修正建議。

在本文的寫作過程中，一個覺得有趣的地方是筆者在透過(12)式來完成(11)式的證明後，想起了自己曾在[6]文中也使用過類似的方式證明

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c),$$

其中 a, b, c 為三角形的三邊。最後無論如何，希望讀者在閱讀本文後能有所收穫，若讀者願意的話，也可將本文視為對[1],[2],[3]三文的補充。

參考文獻

1. 丁遵標。與三角形高有關的幾何性質。數學傳播季刊，29(2)，55-60，2005。
2. 丁遵標。與三角形高有關的兩個幾何不等式。數學傳播季刊，46(3)，106-108，2022。
3. 丁遵標。周界中點三角形中三個有趣的性質。數學傳播季刊，27(4)，89-92，2003。
4. Rearrangement inequality, Wikipedia.
5. Jensen's inequality, Wikipedia.
6. 連威翔。歐拉不等式的另證。數學傳播季刊，45(4)，43-49，2021。