

把 $\cos^n \theta$ 表為 $\cos k\theta$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) 的線性組合

曾祥華

新竹市科學園區實驗高級中學

在牛頓版的高中基礎數學第二冊第 206 頁有這樣一個例題：

試證明： $16 \cos^5 \theta = \cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta$

書上的解法是：設 $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ ， $i = \sqrt{-1}$ 則由 De Moivre 定理知

$$\alpha^n + \alpha^{-n} = 2 \cos n\theta, \quad n \in N$$

因此 $\cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta$

$$= \frac{1}{2} [(\alpha^5 + \alpha^{-5}) + 5(\alpha^3 + \alpha^{-3}) + 10(\alpha + \alpha^{-1})]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^5 = \frac{1}{2} (2 \cos \theta)^5 = 16 \cos^5 \theta$$

在課堂上，老師講解此題時，很自然地提出了一個推廣性的問題：

對一般正整數 n ， $\cos^n \theta$ 是否可表為類似的形式？對於 $\sin^n \theta$ 又如何呢？老師也提到說，上面的例題是要去證明一個已有的結果，因此從「由繁至簡」的角度來看，很自然的，我們容易想到要由等式的右邊式子起始，逐步推導到左邊的式子，方向還是相當明顯的；如果換成只是一個單純的 $\cos^5 \theta$ ，我們怎麼想到它可以寫成 $\cos 5\theta$ ， $\cos 3\theta$ 及 $\cos \theta$ 的線性組合呢？

老師希望我們能花點時間想想他提出的問題。

這個問題引起我相當的興趣，由書上的解法我得到一個啓示，利用 Euler 公式

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ，可得到

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{及} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\text{所以} \quad \cos^n \theta = \frac{1}{2^n} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{0} e^{in\theta} + \binom{n}{1} e^{i(n-1)\theta} e^{-i\theta} + \binom{n}{2} e^{i(n-2)\theta} e^{-i2\theta} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{n-1} e^{i\theta} e^{-i(n-1)\theta} + \binom{n}{n} e^{-in\theta} \right] \end{aligned}$$

(i) 當 $2 \nmid n$ 時：

$$\begin{aligned}\cos^n \theta &= \frac{1}{2^{n-1}} \left[\binom{n}{0} \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} + \binom{n}{1} \frac{e^{i(n-2)\theta} + e^{-i(n-2)\theta}}{2} \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{2} \frac{e^{i(n-4)\theta} + e^{-i(n-4)\theta}}{2} + \dots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cos(n-2k)\theta\end{aligned}$$

(ii) 當 $2 \mid n$ 時：

$$\begin{aligned}\cos^n \theta &= \frac{1}{2^{n-1}} \left[\binom{n}{0} \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} + \binom{n}{1} \frac{e^{i(n-2)\theta} + e^{-i(n-2)\theta}}{2} \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{2} \frac{e^{i(n-4)\theta} + e^{-i(n-4)\theta}}{2} + \dots + \binom{n}{\frac{n}{2}-1} \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} + \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left[\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{k} \cos(n-2k)\theta + \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \right]\end{aligned}$$

另外則有：

$$\begin{aligned}\sin^n \theta &= \frac{1}{(2i)^n} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n \\ &= \frac{1}{(2i)^n} \left[\binom{n}{0} e^{in\theta} + \binom{n}{1} e^{i(n-1)\theta} (-e^{-i\theta}) + \binom{n}{2} e^{i(n-2)\theta} (-e^{-i\theta})^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{n-2} e^{i2\theta} \cdot (-e^{-i\theta})^{n-2} + \binom{n}{n-1} e^{i\theta} (-e^{-i\theta})^{n-1} + \binom{n}{n} (-e^{-i\theta})^n \right] \\ &= \frac{1}{(2i)^n} \left[\binom{n}{0} (e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta}) + \binom{n}{1} (-e^{i(n-2)\theta} + (-1)^{n-1} e^{-i(n-2)\theta}) \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{2} (e^{i(n-4)\theta} + (-1)^{n-2} e^{-i(n-4)\theta}) + \dots \right]\end{aligned}$$

(i) 當 $2 \nmid n$ 時：

$$\begin{aligned}\sin^n \theta &= \frac{1}{(2i)^{n-1}} \left[\binom{n}{0} \left(\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \right) - \binom{n}{1} \left(\frac{e^{i(n-2)\theta} - e^{-i(n-2)\theta}}{2i} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) \right] \\ &= \frac{1}{(2i)^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} \sin(n-2k)\theta\end{aligned}$$

把 $\cos^n \theta$ 表為 $\cos k\theta$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) 的線性組合

(ii) 當 $2 \nmid n$ 時：

$$\begin{aligned}\sin^n \theta &= \frac{1}{2^{n-1} \cdot i^n} \left[\binom{n}{0} \left(\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \right) - \binom{n}{1} \left(\frac{e^{i(n-2)\theta} + e^{-i(n-2)\theta}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{2} \left(\frac{e^{i(n-4)\theta} + e^{-i(n-4)\theta}}{2} \right) + \dots \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{\frac{n}{2}-1} \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} + (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2^{n-1} \cdot i^n} \left[\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \binom{n}{k} \cos(n-2k)\theta + (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right]\end{aligned}$$

上面得到的關於 $\cos^n \theta$ 及 $\sin^n \theta$ 的四個式子，我想到它們有一個應用，即是在一般微積分書本中所列之積分表中，都有這樣兩個式子：

$$\begin{aligned}\int \sin^n ax \, dx &= \frac{-\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax \, dx \\ \int \cos^n ax \, dx &= \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, dx\end{aligned}$$

這兩個式子都是降次公式，對於高次的無法直接求出積分，若利用關於 $\cos^n \theta$ 及 $\sin^n \theta$ 的四個式子，便有：

$$\begin{aligned}\int \sin^n \theta \, d\theta &= \begin{cases} \frac{1}{(2i)^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{k+1} \frac{1}{n-2k} \binom{n}{k} \cos(n-2k)\theta + C, & \text{當 } 2 \nmid n \\ \frac{1}{2^{n-1} \cdot i^n} \left[\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \frac{1}{n-2k} \binom{n}{k} \sin(n-2k)\theta + (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{\theta}{2} \right] + C, & \text{當 } 2 \mid n \end{cases} \\ \int \cos^n \theta \, d\theta &= \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2k} \binom{n}{k} \sin(n-2k)\theta + C, & \text{當 } 2 \nmid n \\ \frac{1}{2^{n-1}} \left[\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{n-2k} \binom{n}{k} \cos(n-2k)\theta + \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\theta}{2} \right] + C, & \text{當 } 2 \mid n \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{例如：} \sin^7 \theta = \frac{1}{(2i)^6} \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{7}{k} \sin(7-2k)\theta$$

$$= \frac{-1}{64} (\sin 7\theta - 7 \sin 5\theta + 21 \sin 3\theta - 35 \sin \theta)$$

$$\therefore \int \sin^7 \theta \, d\theta = \frac{1}{64} \left(\frac{1}{7} \cos 7\theta - \frac{7}{5} \cos 5\theta + 7 \cos 3\theta - 35 \cos \theta \right) + C.$$