

臺灣省新竹區八十三學年度 高級中學數學及自然學科競賽 物理科試題及參考解答

黃福坤
國立臺灣師範大學物理系

壹、前 言

臺灣省政府教育廳為加強輔導公、私立中學數學及自然學科教育所舉辦的八十三學年度數學及自然學科競賽桃竹苗區複賽，於八十三年十一月二十三和二十四日在新竹高中舉行，其中物理科競賽日期為二十四日，競賽內容包括兩大部份：第一部份為實驗設計與操作，時間三小時；第二部份為筆試，以理論方面的試題為主，時間二小時。評審工作由國立臺灣師範大學物理系協助。工作人員由系上教授張秋男、沈青嵩、許蘭生、蔣榮樟、施華強、黃福坤（筆者）等六人及助教徐靜戈、游淑婷、林淡宜、林蓮宜等四人組成，其中張秋男老師為召集人。工作小組於十月初召開第一次工作小組會議，討論並分配工作事宜，會中決議命題工作筆試部份由蔣榮樟及許蘭生兩位老師負責，施華強老師協助；實驗部份由筆者負責，張秋男及沈青嵩兩位老師協助。測驗內容以高級中學物理科課程教材範圍為原則，並包含部份相關基礎科學，以詳測參加者潛能。評審標準：實驗成績佔60，筆試成績佔40。

此次競賽共計十六所高中，四十六位各校物理精英參加，競賽結果第一名由國立科學工業園區實驗高中王秋富同學獲得；第二名為新竹高中周安國同學；第三、四名為武陵高中馬成軍與王唯科兩位同學；第五名為新竹高中彭嶧辰同學；第六名為中壢高中溫嘉政同學，另有六名入選同學。

過去幾年來，筆者在不同區擔任評審時，總是將基本測量儀器的使用，作為評量的重要依據之一。今年筆者依舊自行攜帶一把游標尺，隨意取了一個測量寬度，請所有同學一一寫下標示刻度值。游標尺的精密密度是 $\pm 0.05\text{mm}$ ，游標尺所顯示的刻度應是 1.770cm ，參賽的四十六位同學中，只有十位能不經計算便正確的讀出刻度值及測量單位。另有五位同學需藉助計算機或在一旁筆算一陣子，才得到正確的測量值。同學使用的公式不盡相同。另有三位並不是以副尺刻度零的位置來判讀，而是以副尺內側邊緣來讀值，有

幾位說忘了公式，其中一位很誠實，直接說不會讀值，有三位同學讀出正確值，但漏了單位，共有十多位漏了單位。對於這些同學，我都曾暗示是否遺漏了什麼，但仍未察覺。有同學告訴我 17.7 公分，我手指著游標尺所測的寬度，再度問他，仍說 17.7 公分。這些同學可說是各校認定在物理方面有優異表現，不禁令我產生是否曾用過游標尺的疑惑！這項測試結果雖不理想，但已比往年進步，不過這卻是我們的物理教育該注意檢討的。

實驗題目的主體是由厚度約 0.5 公分的壓克力板所製成的長方體不透明盒子，內部裝了十二塊橡皮擦，盒的其中一面正中央挖了一個直徑約 1 公分的圓孔，同學無法知道盒內裝的是什麼，而必須自行利用提供的器材，設計實驗測出壓克力的密度，盒內未知物的密度及體積，並估算水的表面張力的大小，儀器只提供游標尺及量筒，並不包括測質量的天平等相關器材。題目的精神是希望同學能利用浮力原理，測出上述的物理量。競賽中並不限定用哪一種方式，而希望同學能發揮想像力與創造力，當然也必須兼顧結果的精密度與準確度。各物理量筆者事先皆至少構想了兩種以上的測量方法，但同學仍有不同的方法出籠，足見同學皆具有不錯的資質。

實驗時共同的缺點是：測量時不能善用器材達到較好的精密度，少數同學對物理量缺乏直接的感覺，有一位由於單位弄錯導致求出的未知物重超過 100 公斤，比實際值大了一千倍，但他並未察覺。一個能用他單手輕易玩弄的東西，有可能那麼重嗎？上述觀察到的缺失可作為物理教育工作者思考與改進教學的參考。

實驗部份由於僅有少數同學嚐試估算表面張力，平均成績稍低。由成績分佈高低，我們標出了名次，核對各評審委員現場觀測的結果，被注意到表現較好的，的確都在獲獎名單上，參賽同學成績如下表：

分數 人數	0 - 9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	小計(人)
筆 試	9	11	13	14						36
實 驗	3	18	14	8	4					36
總成績	0	5	5	8	11	9	4	3	1	36

貳、實驗試題

一、注意事項：

1. 所有實驗內容請寫在所附答題紙內。
2. 所有物理量的測量結果請自行設計適當的表格紀錄。

3. 已知物理量：

重力加速度 $g = 9.80 \text{ 米/秒}^2$

水的密度 $\rho_{\text{水}} = 1.00 \text{ 公克/(釐米)}^3$

4. 請先清點實驗器材，如有短缺，請即刻舉手告知監試人員。

二、實驗器材：

塑膠桶	一個	量筒(刻度至毫升)	一支
滴 管	一支	燒杯	一個
小塑膠尺	一支	膠帶	一卷
壓克力片	五片	壓克力盒(含未知物)	一個
量 杯	一個	抹布	一條
游標尺(*)	一支	溫度計(*)	一支
小 刀(*)	一支		

*：為兩人共用之器材。

三、實驗內容：

1. 測量壓克力盒外圍總體積，說明並估算百分誤差的大小。
2. 請利用上述器材，設計實驗以求得下列各物理量(要說明設計所依據的原理及簡要步驟)，假設壓克力盒底面與頂面(有開口的一面)的厚度相同。
 - (1) 測量壓克力的密度 $\rho_{\text{壓克力}} = ?$ (公克/釐米³)
 - (2) 測量壓克力盒內部物體的質量 $M_{\text{未知物}}$ 及密度 $\rho_{\text{未知物}}$ 。
 - (3) 在實驗的過程中，請估算水之表面張力的大小。
(表面張力的定義為在液面邊緣單位長度上所受的垂直拉力。)
 - (4) 總結。

四、實驗設計、數據、分析及報告：(請由次頁開始作答)

五、問題：如果給你一未知密度之溶液，請說明如何利用上述器材以測得其密度。

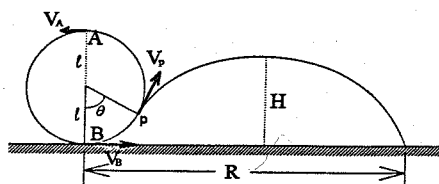
《參考解答》

1. 測量壓克力盒外圍總體積，說明並估算百分誤差的大小。此題最主要目的在於了解學生對於游標尺的認識與使用能力，觀察學生能否正確讀出游標尺刻度。由所提供游標尺的精密度注意其測量值所對應的有效位數是否正確。進一步了解學生能否由長、寬、高的測量值，藉誤差傳遞的法則估算體積測量值的百分誤差。

2. 測量壓克力片的密度。學生可利用所提供的壓克力片用膠帶黏製成盒子，放置於盛水的量杯內。由量內水面上升的高度得知浮力大小。或者先將預製壓克力盒放在量杯內，再將壓克力片置於壓克力盒上端，每放一片壓克力片所升高水面的水重，即壓克力片的重量，測量每片壓克力片的體積，外加所給地面重力場強度 g 值，使得壓克力片的密度。
3. 測量壓克力盒內部未知物質量及密度。將預製壓克力盒放進量杯內，量杯所升高水面的水重，即壓克力盒加內部未知物重量。壓克力盒六面的體積可藉游標尺測得。外加前所測得壓克力片的密度，可算出壓克力盒的重量。於是亦得未知物重量。至於未知物體積可由灌水至壓克力盒內部，測出所灌水量，由壓克力盒六面的測量可知其內容積。容積與所灌水體積之差即未知物體積，即可得其密度。
4. 估算水的表面張力大小。由上述測量得知所提供壓克力密度為 1.18 g/cm^3 ，大於水的密度。但是將壓克力片平放在水面時，壓克力片並不下沉。此乃由於水的表面張力加上水的浮力後大於壓克力片重量。所提供的壓克力片已接近下沉邊緣。所以表面張力 $\times$ 壓克力周長 $\sim$ 壓克力片重 $-$ 壓克力片所受浮力。
由壓克力密度及其體積可算出壓克力片重及壓克力片所受浮力。亦有同學利用滴管滴水，測出很多滴水體積後可得每一滴水重，亦得於水的表面張力 $\times$ 滴管圓周長，也是挺不錯的想法。

參、理論試題

1. 在地面上一細棒長 ℓ ，末端繫一質點質量為 m ，若欲使此質點在鉛垂面上恰能作圓周運動（即 $V_A = 0$ ），則 (25%)
 - (a) 在 B 點之速率 V_B 應為多大？假設細棒之質量可忽略。(5%)
 - (b) 在 θ 角處 P 點之速率 V_P 應為多大？(5%)
 - (c) 若於 P 點處使質點脫離細棒，自由拋出，則其能到達之最高點高度 $H = ?$ (5%)
其射程 $R = ?$ (5%)
(高度及射程均指對 B 點而言)
 - (d) 證明不管質點在何處拋出，質點所能到達之最大高度均不超過 2ℓ 。(5%)



2. 設某人造衛星與月球均繞地球作近似圓形軌道運行，由月球上觀測，發現該人造衛

星與地球可能呈現的最大視角為 θ 。求

(15%)

(a) 該人造衛星運行的軌道半徑 r_s 與月球運行半徑 r_m 之比值為何? (5%)

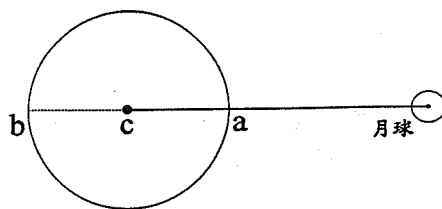
(b) 該人造衛星之運行週期 T_s 與月球繞地球運行週期 T_m 之比值為何? (5%)

(c) 單位時間內，該人造衛星軌道半徑所掃過的面積 A_s 與月球軌道半徑所掃過的面積 A_m 之比值為何? (5%)

3. 地球的質量是月球的81倍，月球距地球的距離為地球半徑的60倍，月球對地球的萬有引力在地表產生潮汐現象(10%)

(a) 什麼叫做「潮汐」現象? (5%)

(b) 請解釋月球的重力場如何在地表引起該現象。(5%)(本題可以你自己的方法解釋，亦可參考提示作答)



提示：如右圖考慮月球之重力加速度在地表 a 、 b 處與球心 c 處之差值。

4. 質量各為 M 與 m ($M > m$) 之表面光滑二球 A 和 B ，球 B 在球 A 上方，同時自高度 h 處由靜止下落 (h 遠大於球之大小)。球 A 落地後即反彈並與球 B 相碰撞。試求：

(a) 球 A 落地前之速度。(5%) (25%)

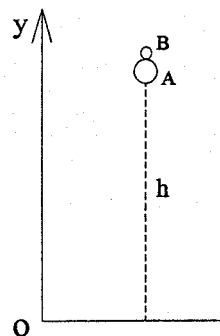
(b) 球 A 落地反彈後與球 B 碰撞時之速度。(5%)

(c) 球 A 撞擊球 B 後，球 B 的速度。(5%)

(d) 球 B 被撞後所能到達的高度。(5%)

(e) 若 $M \gg m$ 則(d)之答案又如何? (5%)

(假設地面水平光滑，所有運動都發生在一鉛直線上，所有摩擦力皆可忽略，所有碰撞皆為彈性碰撞。)



5. 一邊長為 0.50 m 的立方形容器內裝入一莫耳的氮氣，氮氣的總動能為 3600 J 。

試求：

(25%)

(a) 每一氮分子的平均動能。(5%)

(b) 氮分子的方均根速率。(5%)

(c) 每秒鐘氮分子與容器器壁的總碰撞數。(5%)

(d) 氮氣的氣壓。(5%)

(e) 氮氣的溫度。(5%)

亞佛加厥數 $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$ 分子/莫耳，波茲曼常數 $k = 1.38 \times 10^{-23}$ 焦耳/度，理想氣體常數 $R = 8.31$ 焦耳/莫耳·度。

《參考解答》

1. 解： ($V_A = 0$)

(a) $V_B = 2\sqrt{g\ell}$

(b) $V_P = 2\sqrt{g\ell} \cos \frac{\theta}{2}$

(c) $V_P \cos \theta$ 水平初速，

$V_P \sin \theta$ 垂直初速， $V_P \sin \theta = g T_1$ 時，最高點

$$T_1 = \frac{V_P \sin \theta}{g}$$

所上升之高度 $H_1 = V_P \sin \theta \cdot T_1 - \frac{1}{2} g \cdot T_1^2$

$$= V_P \sin \theta \cdot \frac{V_P \sin \theta}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{V_P \sin \theta}{g} \right)^2$$

$$= \frac{V_P^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

起始高度 $= \ell - \ell \cos \theta$

$$H = \text{總共到達之高度} = \frac{V_P^2 \sin^2 \theta}{2g} + (\ell - \ell \cos \theta)$$

$$= \frac{4g\ell \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \theta}{2g} + \ell (1 - \cos \theta)$$

$$= \ell (1 + \cos \theta) \sin^2 \theta + \ell (1 - \cos \theta)$$

$$= \ell [\sin^2 \theta + 1 + \cos \theta \sin^2 \theta - \cos \theta]$$

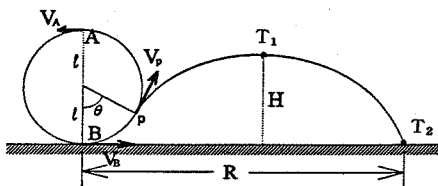
$$= \ell [\sin^2 \theta + 1 - \cos^3 \theta]$$

$$= \ell [2 - \cos^2 \theta - \cos^3 \theta]$$

(d) 在 $\theta = 90^\circ$ 時有最大高度 2ℓ

自最高點自由落體

$$H = \frac{1}{2} g T_2^2, \quad \therefore T_2 = \left(\frac{2H}{g} \right)^{1/2}$$



$$\begin{aligned}
 R &= \ell \sin \theta + V_P \cos \theta \cdot (T_1 + T_2) \\
 &= \ell \sin \theta + 2\sqrt{g\ell} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \left\{ \frac{2\sqrt{g\ell} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta}{g} \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{2\ell (2 - \cos^2 \theta - \cos^3 \theta)}{g} \right]^{1/2} \right\} \\
 &= \ell \sin \theta + 2\ell \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin 2\theta \\
 &\quad + 2\sqrt{g\ell} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\ell} \sin \frac{\theta}{2} [4 \cos^4 \frac{\theta}{2} + 1]^{1/2}}{\sqrt{g}} \\
 &= \ell \sin \theta + 2\ell \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin 2\theta + 2\ell \sin 2\theta [4 \cos^4 \frac{\theta}{2} + 1]^{1/2} \\
 &= \ell \sin \theta + \sin^2 \theta [2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (4 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1)^{1/2}] \\
 &= \ell \sin \theta + \ell \sin^2 \theta [1 + \cos \theta + \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + 1}]
 \end{aligned}$$

2. 解：

(a) $\frac{r_s}{r_M} = \sin \theta$

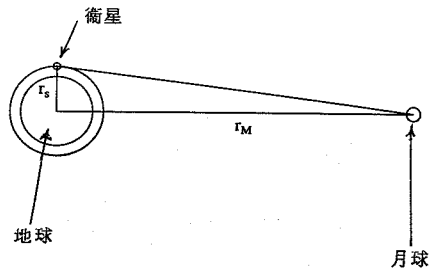
(b) $\frac{T_s^2}{T_M^2} = \frac{r_s^3}{r_M^3} = \sin^3 \theta$

$$\frac{T_s}{T_M} = \left(\frac{r_s}{r_M} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \therefore \frac{T_s}{T_M} = (\sin \theta)^{\frac{3}{2}}$$

(c) $A_s = \frac{1}{2} r_s^2 \omega_s = \frac{1}{2} r_s^2 \cdot \frac{2\pi}{T_s} = \frac{\pi r_s^2}{T_s}$

$$A_M = \frac{1}{2} r_M^2 \omega_M = \frac{1}{2} r_M^2 \cdot \frac{2\pi}{T_M} = \frac{\pi r_M^2}{T_M}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{A_s}{A_M} &= \frac{\frac{r_s^2}{T_s}}{\frac{r_M^2}{T_M}} = \left(\frac{r_s}{r_M} \right)^2 \cdot \left(\frac{T_M}{T_s} \right) = \left(\frac{r_s}{r_M} \right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{r_s}{r_M} \right)^{3/2}} \\
 &= \left(\frac{r_s}{r_M} \right)^{1/2} = (\sin \theta)^{1/2}
 \end{aligned}$$



3. 解：

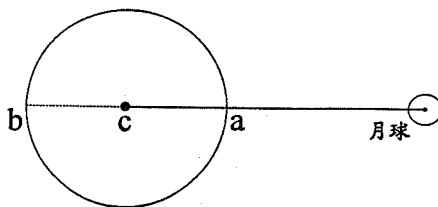
(a) 潮汐就是月亮引起海水漲潮、退潮的現象，每月農曆初一、十五有兩次為月潮，漲幅較大；每天有兩次較小為日潮。

(b) 其原因可考慮月球重力加速度在地表 a 、 b 及地心處之差值如下：

$\vec{g}_c$ ：做為單位

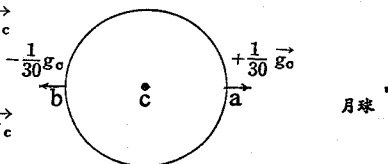
$$\vec{g}_a = \left(\frac{60}{59}\right)^2 \vec{g}_c$$

$$\vec{g}_b = \left(\frac{60}{61}\right)^2 \vec{g}_c$$

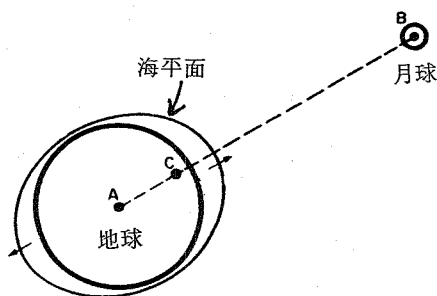


$$\Delta \vec{g}_a = \vec{g}_a - \vec{g}_c = \left[\left(\frac{60}{59}\right)^2 - 1 \right] \vec{g}_c \cong \frac{1}{30} \vec{g}_c$$

$$\Delta \vec{g}_b = \vec{g}_b - \vec{g}_c = \left[\left(\frac{60}{61}\right)^2 - 1 \right] \vec{g}_c \cong -\frac{1}{30} \vec{g}_c$$



故就地心 c 而言， a 、 b 兩處所受月球之重力加速度均向外，故此，若有海水受此加速度即產生漲潮， a 為月圓之時， b 為月虧，故此每月有兩次大潮。且每天因地球自轉亦有兩次小漲潮，其原因如下：如右圖地球接近月球之海平面因受月球萬有引力，故有小漲潮；另遠



離月球之海平面因地球與月球互繞質心 C 轉動，海水被拋離原海平面的效果最大，故有小漲潮。

4. (a) $U+K$ ：定值 $Mgh+0=0+\frac{1}{2}MU^2$

$$\therefore V=\sqrt{2gh}, \quad \text{向下}$$

(b) $V=\sqrt{2gh}$ ，向上，因為彈性碰撞

(c) $\therefore$ 動量守恆 $mv_1 + MV_1 = mv_2 + MV_2 \dots\dots\dots ①$

能量守恆 $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 \dots\dots ②$ } 公式

$$\therefore \textcircled{1}, \textcircled{2} \quad V_2 + V_1 = v_1 + v_2 \quad \text{或} \quad V_2 = -V_1 + v_1 + v_2$$

$$\therefore V_1 = V \text{ (A 球, 向上)} \quad v_1 = -V \text{ (B 球, 向下)}$$

$$V_2 = v_2 - 2V \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \quad m(-V) + M \cdot V = m \cdot v_2 + M(v_2 - 2V)$$

$$(m + M)v_2 = (3M - m)V$$

$$v_2 = \frac{3M - m}{M + m} V = \frac{3M - m}{M + m} \sqrt{2gh}$$

$$(d) \quad v_2 = \sqrt{2gh_2} \quad h_2 = \left(\frac{3M - m}{M + m} \right)^2 h$$

$$(e) \quad h_2 = \left(\frac{3M}{M} \right)^2 h = 9h$$

$$5. (a) \quad U = N\bar{E} \quad \bar{E} = \frac{U}{N_0} = \frac{3600}{6.02 \times 10^{23}} = 598 \times 10^{-23} \text{ J} = 5.98 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$(b) \quad \bar{V}^2 = \frac{2\bar{E}}{m} = \frac{2N_0\bar{E}}{mN_0} = \frac{2U}{mN_0} = \frac{2 \times 3600}{4 \times 10^{-3}} = 1800 \times 10^3$$

$$= 1.80 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\sqrt{\bar{V}^2} = V_{\text{rms}} = 1.34 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$(c) \quad \bar{V}_x^2 = \frac{1}{3} \bar{V}^2 = 0.600 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\bar{V}_x = \sqrt{\bar{V}_x^2} = 0.770 \times 10^3 = 770 \text{ m/s}$$

$$\text{每秒碰撞數} = 3.00 \times \frac{770}{0.500} \times 6.02 \times 10^{23} = 2.78 \times 10^{27} \text{ 碰撞/秒}$$

$$(d) \quad PV = \frac{2}{3} N\bar{E} = \frac{2}{3} U$$

$$P = \frac{2U}{3V} = \frac{2 \times 3600}{3 \times 0.500^3} = 1.90 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

$$(e) \quad PV = nRT, \quad T = \frac{PV}{nR} = \frac{2U}{3nR}$$

$$T = \frac{2 \times 3600}{3 \times 1 \times 8.31} = 290^\circ \text{K}$$