

臺灣省北區八十三學年度 高級中學數學及自然學科競賽 數學科複賽試題及參考解答

國立臺灣師範大學數學系

《試題部份》

壹、一、台北區複賽試題(一)

注意事項：

1. 本試卷共三大題；第一題 15 分，第二題 16 分，第三題 18 分（滿分 49 分）
2. 考試時間：2 小時。
3. 計算紙必須連同試卷紙交回。
4. 不可使用計算器。

問題 1.：（15 分）

設 a 為整數且 $x^3 - 19x + a = 0$ 的三根都是整數，試求出所有這樣的 a 值。

問題 2.：（16 分）

在直角空間座標系中， $A(1, 0, 0)$ ， $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ ，及 $C(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

為單位球面上 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的三點，分別通過 $\widehat{AB}$ 、 $\widehat{BC}$ 、 $\widehat{CA}$ 的三個大圓將球面分成八塊區域，求其中表面積最小區域的面積值。（半徑 r 的球，其表面積為 $4\pi r^2$ ）

問題 3.：（18 分）

在已填妥了 9 個數的 3×3 正方形表（如下表 1 或表 2），將方格表中有共同一邊的兩方格中的數稱做相鄰兩數，每次實施如下規則的操作：

對於任意兩個相鄰的數減去同一個數。

- (1) 如表 1 中的數表，依上述規則操作，能否在經過有限次後，得到表中各方格的數都變成 0？
- (2) 如表 2，四個角落的方格都是 83，而其餘五個方格都是 82，能否在經過有限次後，得到表中各方格的數都變成 0？

82	83	80
80	7	86
85	89	84

(表1)

83	82	83
82	82	82
83	82	83

(表2)

二、台北區複賽試題(二)

注意事項：

1. 本試卷共7題，每題3分，滿分21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 計算紙必須連同試卷紙交回。
4. 不可使用計算器。

(請將答案填在劃線空格內)

1. 設 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數， $M = \sum_{n=1}^{1994} [\log_{10} n]$ ，則 M 之值為_____。
2. 設 n 為使 $(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i)^n$ 是實數值的最小正整數，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 n 之值為_____，此時所得的實數值為_____。
3. 設 x, y, z, u 為滿足下列方程組的實數：

$$\begin{cases} x + 7y + 3z + 5u = 24 \\ 8x + 4y + 6z + 2u = -24 \\ 2x + 6y + 4z + 8u = 24 \\ 5x + 3y + 7z + u = -24 \end{cases}$$
 則 z 的值為_____。
4. 已知袋中共有120個大小相同的色球，其中有35個紅色球、30個綠色球、28個藍色球、15個黃色球及12個黑色球。某人聲稱他每次取 k 個球，不管取出任何情形，確定至少有20個同色球，那麼，這樣的 k 的最小值是_____。
5. 設 k, l, m 都是不小於3的正整數，且知 $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} - \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$ ，求出所有滿足上述條件的正整數組 (k, l, m) 得_____。

6. $A(-4, 0)$ 及 $B(0, 8)$ 為直角坐標平面上的兩個定點， P 為二次曲線 $9x^2 + 4y^2 = 36$ 上的任一點，求出所得 $\triangle ABP$ 面積的最大值_____。
7. 有限數列 $X = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ ，將 $T_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$ 稱作數列 X 的算術平均和，其中 $S_k = \sum_{j=1}^k a_j$ ， $1 \leq k \leq n$ 。設一個有 999 項的數列 $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{999}]$ ，其算術平均和為 10000，則 1000 項的數列 $[1, a_1, a_2, \dots, a_{999}]$ 的算數平均和為_____。

貳、一、新竹區複賽試題(一)

注意事項：

1. 本試卷共三題，滿分為四十九分。
第一題十六分、第二題十六分、第三題十七分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

- 問題 1. 證明多項式 $x^{400} + x^{380} + \dots + x^{20} + 1$ 可被 $x^{20} + x^{19} + \dots + x + 1$ 整除。
- 問題 2. 設正三角形 ABC 的邊長為 1，點 P 、 Q 、 R 分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 邊上。問 $\triangle PQR$ 的周長最小是多少？證明您的答案。
- 問題 3. 設 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 是 n 個正整數， γ 是整數。若在 $\prod_{i=1}^n (1 + t + \dots + t^{k_i-1})$ 的展開式中， $t^{\gamma+s}$ 項的係數為 $A^{(\gamma)}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ，此處 γ 是整數， $S = [\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (k_i - 1)]$ ， $[\cdot]$ 表示高斯符號。證明
- $$A^{(\gamma)}(a, b, k_3, \dots, k_n) = \sum_{j=1}^a A^{(\gamma)}(a + b + 1 - 2j, k_3, \dots, k_n)$$
- 其中 $a \leq b$ 為正整數。

二、新竹區複賽試題(二)

注意事項：

1. 本試卷共五題，滿分為二十一分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

問題 1. 從 1 到 200 的各個正整數中，那一個數有最多個因數？答：_____。(3 分)

問題 2. 設一圓的半徑為 1， P 為此圓內部的一點，已知有一弦通過 P 點且被 P 點分成的兩段長度的比為 1:3，此 P 點與圓心的距離最小是 _____。(3 分)

問題 3. 在座標平面上，橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的切線與座標軸所圍成的三角形中，面積最小為 _____。(4 分)

問題 4. 設 A 與 B 為一正方形兩對邊的中點，在此正方形內任取一點 C ，則 $\triangle ABC$ 是銳角三角形的機率為 _____。(4 分)

問題 5. 數列 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, …… 的第 n 項用高斯符號表示為 _____。(4 分)

問題 6. 令 $Z[x, y]$ 表示係數是整數的所有 x, y 的多項式所成的集合。設 a, b 是正整數且

$$A = \{f_1(x, y)x^{125} + f_2(x, y)(x^9 - y^{15}) \mid f_1(x, y), f_2(x, y) \in Z[x, y]\}$$

$$B = \{g_1(x, y)x^a y^b + g_2(x, y)(x^9 - y^{15}) \mid g_1(x, y), g_2(x, y) \in Z[x, y]\}$$

求 (a, b) ，使得 $A = B$ 。答：_____。(4 分)

參、一、花蓮區複賽試題(一)

(共三大題，總分七十分)

1. 設 N 為所有正整數的集合，函數 $f: N \rightarrow N$ 定義為 $f(n) = m$ ，其中 m 為滿足 $n \mid m!$ 的最小正整數。(30 分)

(a) 證明：若 $p > 4$ ，則 p 為一質數 $\Leftrightarrow f(p) = p$

(b) 求 $f(11^{1994})$ 之值。

(c) 求出所有滿足 $f(n) = 10$ 的正整數 n 。

2. 試證方程式 $10x^{10} + 9ix^9 + 18ix^7 + 18ix^5 + 18ix^3 + 9ix + 10 = 0$ 無實根且恰有兩虛根，其絕對值為 1。 (20分)
3. 已知 A 點的坐標為 $(5, 1)$ ，圓 C 之方程式為 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ ，今有一束光線通過 A 點，射向鏡面 x 軸上一點 $P(a, 0)$ 。試問： (20分)
- (a) 若經鏡面 x 軸折射後會觸及圓 C ，則 a 之範圍為何？
- (b) 若 y 軸亦為鏡面，此光線經鏡面 x 軸折射後轉而射向鏡面 y 軸(但不觸及圓 C)，再經鏡面 y 軸折射後會觸及圓 C ，則 a 之範圍為何？

二、花蓮區複賽試題(二)

(共六題，每題五分，總分三十分)

1. 已知直線 L 的斜率為 2，它與圓 $C_1: x^2 + y^2 = 25$ 交於 A, B 兩點，與圓 $C_2: x^2 - 4x + y^2 - 2y - 11 = 0$ 交於 C, D 兩點且 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，則 $\overline{AB} =$ _____。
2. 將一條長 15 公分的直線截成三段，再將這三段直線分別圍成一個正三角形、一正方形及一圓；則這三個圖形面積之和的最小值為 _____。
3. 設 F_1, F_2 為橢圓 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的兩個焦點。 P 為橢圓上一點且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，則 $\triangle F_1PF_2$ 的面積為 _____。
4. $f(x) = \sin x + \cos x + \frac{1}{2} \sin x \cos x$ 之極大值為 _____。
5. 甲、乙、丙、丁四人比賽打靶。約定得分相同者名次相同。則此四人最後排名共有 _____ 種情形。
6. 坐標空間有一球面 S 及兩直線 L_1, L_2 。這兩條直線都通過球外一定點 $P(2, -11, 5)$ ；直線 L_1 交球面 S 於 $A(-2, 1, 1)$ 與 $B(-1, -2, 2)$ 兩點；直線 L_2 只交球面 S 於一點 Q ，則 $\overline{PQ} =$ _____。

《參考解答》

壹、一、台北區複賽試題(一)

問題 1. 設 α, β, γ 為 $x^3 - 19x + a = 0$ 之三根。

利用根與係數之關係可得

$$(1) \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -19 \\ \alpha\beta\gamma = -a \end{cases}$$

由(1)中之第1與第2式可得

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 38 \dots\dots\dots (2)$$

因 α, β, γ 是整數且需滿足(1)中之第1式

故可能之解為 $5, -3, -2$ 或 $-5, 3, 2$

由(1)之第3式可得可能之 a 為

$$a = -[5 \times (-3) \times (-2)] = -30$$

$$\text{或 } a = -[(-5) \times (3) \times (2)] = 30$$

問題2 通過 $\widehat{AB}$ 大圓的平面為 $\pi_1: z=0$ 其單位法向量 $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$

通過 $\widehat{BC}$ 大圓的平面為 $\pi_2: \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0$

$$\text{其單位法向量 } \vec{n}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

通過 $\widehat{CA}$ 大圓的平面為 $\pi_3: -\frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0$

$$\text{其單位法向量 } \vec{n}_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$\Rightarrow$ 球面 $\triangle ABC$ 的內角 $\angle A, \angle B, \angle C$ 滿足

$$\cos \angle A = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \angle B = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$\cos \angle C = \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle A = \frac{\pi}{4}, \quad \angle B = \frac{\pi}{2}, \quad \angle C = \frac{\pi}{3}$$

令 A', B', C' 分別為 A, B, C 對稱原點的三點

$\Rightarrow \widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ 三大圓分割八區域 $\triangle ABC \quad \triangle A'BC \quad \triangle AB'C$
 $\triangle ABC' \quad \triangle A'B'C' \quad \triangle AB'C' \quad \triangle A'BC' \quad \triangle A'B'C$

其中面積 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ $\triangle A'BC = \triangle AB'C'$
 $\triangle AB'C = \triangle A'BC'$ $\triangle ABC' = \triangle A'B'C$

且 $\triangle ABC + \triangle A'BC = \frac{\angle A}{2\pi} \cdot 4\pi = \frac{\pi}{2}$

$\triangle ABC + \triangle AB'C = \frac{\angle B}{2\pi} \cdot 4\pi = \pi$

$\triangle ABC + \triangle ABC' = \frac{\angle C}{2\pi} \cdot 4\pi = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore \triangle ABC + \triangle AB'C + \triangle ABC' + \triangle AB'C' = 2\pi$ (半球面)

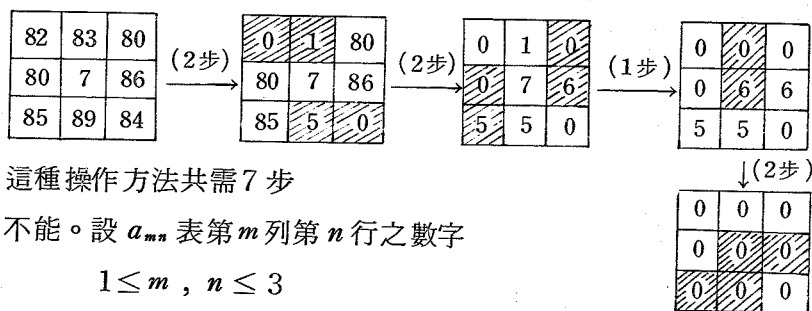
且 $\triangle A'BC = \triangle AB'C'$

$\therefore \triangle ABC = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$

得 $\triangle ABC = \frac{\pi}{12}$, 同理 $\triangle A'BC = \frac{5}{12}\pi$, $\triangle AB'C = \frac{11}{12}\pi$, $\triangle ABC' = \frac{7}{12}\pi$

$\therefore$ 最小面積值為 $\frac{\pi}{12}$

問題 3 (1) 能。其操作如下：(下列僅列出一種方法)



這種操作方法共需7步

(2) 不能。設 a_{mn} 表第 m 列第 n 行之數字

$1 \leq m, n \leq 3$

由操作過程得知

$(a_{11} + a_{13} + a_{31} + a_{33} + a_{22})$

$-(a_{12} + a_{21} + a_{23} + a_{32})$ 為不變量

數表 2 之

$(a_{11} + a_{13} + a_{31} + a_{33} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21} + a_{23} + a_{32}) = 86$

而最後能得到每格都是 0 之

$(a_{11} + a_{13} + a_{31} + a_{33} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21} + a_{23} + a_{32}) = 0$

故絕無法達成最後每格都是 0。

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

二、台北區複賽試題(二)

1. 4875 2. $n=12$; 實數值 $= -4096$ (或 -2^{12}) 3. -3
4. 85 5. $(3, 3, 6), (3, 4, 12), (3, 5, 30), (4, 3, 12), (5, 3, 30)$
6. 26 7. 9991

貳、一、新竹區複賽試題(一)

問題1 (解法1)

$$\text{因爲 } x^{400} + x^{380} + \cdots + x^{20} + 1 = \frac{x^{420} - 1}{x^{20} - 1}$$

$$x^{20} + x^{19} + \cdots + x + 1 = \frac{x^{21} - 1}{x - 1}$$

所以我們只須證明 $x^{420} - 1$ 可被 $\frac{(x^{20} - 1)(x^{21} - 1)}{x - 1}$ 整除即可。

由於 $x^{420} - 1 = (x^{21})^{20} - 1$ ，所以 $x^{420} - 1$ 可被 $x^{21} - 1$ 整除。又因爲 $x^{420} - 1$ 也可被 $x^{20} - 1$ 所整除，所以 $x^{420} - 1$ 可被 $x^{20} - 1$ 與 $x^{21} - 1$ 的最小公倍式所整除。因爲 $x^{20} - 1$ 與 $x^{21} - 1$ 的最大公因式

$$\begin{aligned} (x^{20} - 1, x^{21} - 1) &= (x^{20} - 1, x^{21} - x^{20}) = (x^{20} - 1, x^{20}(x - 1)) \\ &= (x^{20} - 1, x - 1) = (x - 1) \end{aligned}$$

所以 $x^{20} - 1$ 與 $x^{21} - 1$ 的最小公倍式爲 $\frac{(x^{20} - 1)(x^{21} - 1)}{x - 1}$

故本題得證。

(解法2)

$$(x + 1)(x^{20} + \cdots + 1) = x^{21} - 1$$

所以除了1以外， $x^{21} - 1 = 0$ 與 $x^{20} + \cdots + x + 1 = 0$ 有相同的根。

令 ω 爲 $x^{20} + \cdots + x + 1 = 0$ 的根， $\therefore \omega^{21} = 1$

$$\text{因爲 } (x^{400} + x^{380} + \cdots + x^{20} + 1)(x^{20} - 1) = x^{420} - 1$$

$$\therefore (\omega^{400} + \omega^{380} + \cdots + \omega^{20} + 1)(\omega^{20} - 1) = \omega^{420} - 1 = (\omega^{21})^{20} - 1 = 0$$

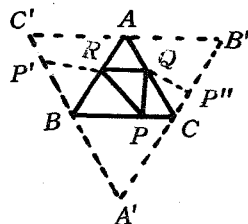
$$\therefore \omega^{20} \neq 1, \therefore \omega^{40} + \cdots + \omega^{20} + 1 = 0$$

所以 $x^{20} + x^{19} + \cdots + 1 = 0$ 的根皆爲 $x^{400} + x^{380} + \cdots + x^{20} + 1 = 0$ 的根

因此 $x^{400} + \dots + x^{20} + 1$ 可被 $x^{20} + \dots + 1$ 整除。

問題 2. 我們將 $\triangle ABC$ 向外作正三角形 ABC' , BCA' , CAB' , 並分別作 P 點對於 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 的對稱點 P' , P'' (如右圖)。

則 $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{P''Q} + \overline{QR} + \overline{RP'} \geq \overline{P'P''}$
(若 Q, R 在 $\overline{P'P''}$ 上, 則等號成立。)



我們將證明 $\overline{P'P''} \geq \frac{3}{2}$:

設 $\overline{BP} = x$, 則 $\overline{AP'} = 1 + x$, $\overline{AP''} = 2 - x$

由餘弦定理知

$$\begin{aligned}\overline{P'P''}^2 &= (1+x)^2 + (2-x)^2 - 2(1+x)(2-x)\cos 60^\circ \\ &= 3\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\}\end{aligned}$$

所以當 $x = \frac{1}{2}$ 時 $\overline{P'P''}$ 有極小值 $\frac{3}{2}$

問題 3. 設 $c := \left\lfloor \frac{(a-1) + (b-1)}{2} + \frac{\sum_{i=3}^n (k_i - 1)}{2} \right\rfloor$

$$c_j := \left\lfloor \frac{a+b-2j}{2} + \frac{\sum_{i=3}^n (k_i - 1)}{2} \right\rfloor = c - (j-1)$$

$$(1+t+\dots+t^{a-1})(1+t+\dots+t^{b-1}) \prod_{i=3}^n (1+t+\dots+t^{k_i-1})$$

$$= \frac{(1-t^a)(1-t^b)}{(1-t)^2} \prod_{i=3}^n \frac{1-t^{k_i}}{1-t}$$

展開後 t^{r+c} 項的係數是 $A^{(r)}(a, b, k_3, \dots, k_n)$

$$\text{而 } t^{j-1} \cdot (1+t+\dots+t^{a+b-2j}) \prod_{i=3}^n (1+t+\dots+t^{k_i-1})$$

$$= t^{j-1} \frac{1-t^{a+b+1-2j}}{1-t} \prod_{i=3}^n \frac{1-t^{k_i}}{1-t}$$

展開後 t^{r+c} 項的係數是 $A^{(r)}(a+b+1-2j, k_3, \dots, k_n)$

$$\begin{aligned}\text{而 } \frac{(1-t^a)(1-t^b)}{(1-t)^2} &= \frac{(1+t+\cdots+t^{a-1})(1-t^b)}{1-t} \\ &= \frac{(1+t+\cdots+t^{a-1})-(t^b+t^{b+1}+\cdots+t^{a+b-1})}{1-t} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^a t^{j-1} (1-t^{a+b+1-2j})}{1-t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{因此 } \frac{(1-t^a)(1-t^b)}{(1-t)^2} \prod_{i=3}^n \frac{1-t^{k_i}}{1-t} \\ = \sum_{j=1}^a \left(\frac{t^{j-1} (1-t^{a+b+1-2j})}{1-t} \prod_{i=3}^n \frac{1-t^{k_i}}{1-t} \right)\end{aligned}$$

比較兩邊之 t^{r+c} 項的係數。左邊是 $A^{(r)}(a, b, k_3, \dots, k_n)$,

右邊是 $\sum_{j=1}^a A^{(r)}(a+b+1-2j, k_3, \dots, k_n)$

故得證。

二、新竹區複賽試題(二)

問題 1. 180

設 $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$, 其中 $p_1, p_2, \dots, p_r$ 為相異質數, 則 n 的因數個數為 $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_r+1)$ 。因為 $n \leq 200$ 且要使 n 的因數個數最多。所以 $p_1, p_2, \dots, p_r$ 要儘量小。因此 n 有下列幾種可能:

$$2^7, \quad 2^6 \cdot 3, \quad 2^4 \cdot 3^2, \quad 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

其中以 $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ 的因數有 18 個為最多。

問題 2. $\frac{1}{2}$

通過圓內一定點的各弦中, 以直徑被該點所分成的兩段之比最小(或最大)。

問題 3. 6

通過橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ 上一點 $P(x_0, y_0)$ 的切線方程式為

$$\frac{x_0 x}{9} + \frac{y_0 y}{4} = 1$$

此切線與坐標軸所圍成的三角形的面積： $A = \frac{1}{2} \left| \frac{9}{x_0} \right| \left| \frac{4}{y_0} \right| = \frac{18}{|x_0 y_0|}$

因為 $P(x_0, y_0)$ 在橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上，所以可設

$$x_0 = 3 \cos \theta, \quad y_0 = 2 \sin \theta$$

$$\text{所以 } A = \frac{18}{|3 \cos \theta \cdot 2 \sin \theta|} = \frac{6}{|\sin 2\theta|}$$

$|\sin 2\theta|$ 有最大值 1 (例如 $\theta = \frac{\pi}{4}$)，所以 A 有最小值 6。

問題 4. $\frac{4-\pi}{4}$

以 $\overline{AB}$ 為直徑作一圓。因為 C 點在正方形內，所以 $\triangle ABC$ 為銳角三角形的充

要條件，是 C 點在此圓之外，因此機率為 $1 - \frac{\text{圓面積}}{\text{正方形面積}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

問題 5. $\left\lfloor \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor$

設第 n 項為 k 。我們知道從第 $\{1+2+\cdots+(k-1)\}+1 = \frac{k(k-1)}{2} + 1$

項到第 $1+2+\cdots+(k-1)+k = \frac{k(k+1)}{2}$ 項都是 k ，所以

$$\frac{k(k-1)}{2} + 1 \leq n < \frac{k(k+1)}{2} + 1$$

$$\therefore k^2 - k \leq 2n - 2 < k^2 + k$$

$$\text{由 } k^2 - k \leq 2n - 2 \text{ 得 } k \leq \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$$

$$\text{由 } k^2 + k > 2n - 2 \text{ 得 } k > \frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2} = \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} - 1$$

$$\text{所以 } k \leq \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} < k+1 \quad \text{故 } \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k$$

問題 6. $(a, b) = (8, 195)$

$$125 = 9 \cdot 13 + 8, \quad 15 \cdot 13 = 195$$

考慮 $x^8 y^{195}$

若能證明 $x^{125} \in B$ 且 $x^8 y^{195} \in A$ 則可得 $A=B$

$$\begin{aligned} x^{125} - x^8 y^{195} &= x^8 (x^{117} - y^{195}) = x^8 ((x^9)^{13} - (y^{15})^{13}) \\ &= x^8 (x^9 - y^{15})(x^{108} + \dots + y^{180}) \end{aligned}$$

因此 $x^{125} = x^8 y^{195} + (x^9 - y^{15}) \cdot x^8 (x^{108} + \dots + y^{180}) \in B$

同理 $x^8 y^{195} = x^{125} - (x^9 - y^{15}) x^8 (x^{108} + \dots + y^{180}) \in A$

參、一、花蓮區複賽試題(一)

1. (a) $(\Rightarrow) p$ 爲質數 $\Rightarrow p \nmid 1, 2, \dots, p-1$

$$\Rightarrow p \nmid (p-1)! \text{ 但 } p \mid p!$$

$$\Rightarrow f(p) = p$$

$(\Leftarrow)$ 設 p 不爲質數，且 $f(p) = p$

$$\text{則 } p = rs \quad r > 1 \quad s > 1 \quad r \geq s$$

(1) 若 $r > s$ ，則 $p \mid r! \Rightarrow f(p) \leq r < p$

(2) 若 $r = s$ 則 $p = r^2$

$$\therefore f(p) = p$$

$$\therefore p \nmid (p-1)! = (r^2-1)!$$

$$\Rightarrow r \nmid (r^2-1) \dots \hat{r} \dots 1$$

$$\Rightarrow r \leq 2$$

因爲若 $r > 2$ 則 $r^2 > 2r$

$$\Rightarrow r^2 - 1 \geq 2r$$

$$\Rightarrow r \mid (r^2-1) \dots \hat{r} \dots 1$$

而導出一矛盾的結果。

$$\therefore r > 1$$

$$\therefore r = 2 \Rightarrow p = r^2 = 4$$

(b) 證 $f(11^{1994}) = 1815 \times 11 = 19965$

(1) 設 $f(11^{1994}) = k \times 11 + r$ 其中 $0 \leq r < 11$

因若 $r > 0$ 則 $k \times 11 + 1, k \times 11 + 2, \dots, k \times 11 + r$ 都與 11 互質

$$\text{而 } 11^{1994} \mid (k \times 11 + r)! \Rightarrow 11^{1994} \mid (k \times 11)! \Rightarrow r = 0$$

$$\text{故 } f(11^{1994}) = k \times 11$$

$$(2) \text{ 設 } k = a \times 11^3 + b \times 11^2 + c \times 11 + d, \text{ 其中 } 0 \leq a, b, c, d < 11$$

$$\text{則因 } k + \left[\frac{k}{11} \right] + \left[\frac{k}{11^2} \right] + \left[\frac{k}{11^3} \right] \geq 1994$$

$$\text{所以有 } a \times 11^3 + (a+b) \times 11^2 + (a+b+c) \times 11 + (a+b+c+d) = 1994$$

$$\begin{aligned} \text{顯然 } a=1 \text{ 則 } (a+b) \times 11^2 + (a+b+c) \times 11 + (a+b+c+d) \\ = 1994 - 11^3 = 663 \end{aligned}$$

$$\therefore 663 = 5 \times 11^2 + 58 \quad \therefore a+b=5 \Rightarrow b=4$$

$$\therefore 58 = 5 \times 11 + 3 \quad \therefore a+b+c=5 \Rightarrow c=0$$

$$\text{故取 } d=0, \text{ 此時 } k = 11^3 + 4 \times 11^2 = 1815$$

(c) 求 $f(n) = 10$ 之解：

$$\therefore n \mid 10! \Rightarrow n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta$$

$$\text{而 } 10! \text{ 含有 } \left[\frac{10}{2} \right] + \left[\frac{10}{4} \right] + \left[\frac{10}{8} \right] = 5 + 2 + 1 = 8 \text{ 個 } 2$$

$$\text{含 } \left[\frac{10}{3} \right] + \left[\frac{10}{9} \right] = 3 + 1 = 4 \text{ 個 } 3$$

$$\text{含 } \left[\frac{10}{5} \right] = 2 \text{ 個 } 5$$

$$\text{含 } \left[\frac{10}{7} \right] = 1 \text{ 個 } 7$$

$$2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta \mid 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 10!$$

$$\text{若 } n \mid 10! \Rightarrow \alpha \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}, \beta \in \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$\gamma \in \{0, 1, 2\}, \quad \delta \in \{0, 1\}$$

$$\text{又 } 10 \text{ 爲滿足 } n \mid 10! \text{ 之最小正整數} \Rightarrow n \nmid 9! = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\Rightarrow \alpha > 7 \text{ 或 } \beta > 4 \text{ (不可能) 或 } \gamma > 2 \text{ 或 } \delta > 1 \text{ (不可能)}$$

$$\Rightarrow \alpha = 8 \text{ 或 } \gamma = 2$$

$$\therefore n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta$$

$$\text{其中 } \begin{cases} \alpha = 8, & \beta \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\ \gamma \in \{0, 1, 2\}, & \delta \in \{0, 1\} \end{cases}$$

$$\text{或 } \alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\beta \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$r = 2$$

$$\delta \in \{0, 1\}$$

2. (1) 此方程式無實根。

設 $x = \alpha$ 為其一實根，則 $10(\alpha^{10} + 1) + 9i\alpha(\alpha^8 + 2\alpha^6 + 2\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$ 且 $\alpha^{10} + 1 = 0$ 矛盾

(2) 此方程式有兩虛根在單位圓上

$$\therefore 10(x^{10} + 1) + 9ix[x^4(x^4 + 2x^2 + 1) + (x^4 + 2x^2 + 1)] = 0$$

$$10(x^2 + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) + 9ix(x^2 + 1)^2(x^4 + 1) = 0$$

$$(x^2 + 1)[10(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) + 9ix(x^2 + 1)(x^4 + 1)] = 0$$

$\therefore x = \pm i$ 為此方程式在單位圓上之兩根

(3) 此方程式的其他虛根都不在單位圓上

若此方程式另有一根 β 也落在單位圓上，則

$$10(\beta^8 - \beta^6 + \beta^4 - \beta^2 + 1) + 9i\beta(\beta^2 + 1)(\beta^4 + 1) = 0$$

兩邊同乘以 $\frac{1}{\beta^4}$

$$\text{得 } 10[(\beta^4 + \frac{1}{\beta^4}) - (\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}) + 1] + 9i \cdot \frac{\beta^2 + 1}{\beta} \cdot \frac{\beta^4 + 1}{\beta^2} = 0$$

$$\text{即 } 10[(\beta^4 + \frac{1}{\beta^4}) - (\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}) + 1] + 9i(\beta + \frac{1}{\beta})(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}) = 0$$

$$\text{令 } t = \beta + \frac{1}{\beta} \text{ 則 } t^2 = (\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}) + 2, \quad t^4 = (\beta^4 + \frac{1}{\beta^4}) + 4(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}) + 6$$

$$\text{故 } \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} = t^2 - 2, \quad \beta^4 + \frac{1}{\beta^4} = t^4 - 4(t^2 - 2) - 6 = t^4 - 4t^2 + 2$$

$$\text{因此有 } 10[(t^4 - 4t^2 + 2) - (t^2 - 2) + 1] + 9it(t^2 - 2) = 0$$

$$10(t^4 - 5t^2 + 5) + 9it(t^2 - 2) = 0$$

$\therefore \beta$ 在單位圓上

$\therefore \beta = a + bi$ ，其中 a, b 為實數，且 $a^2 + b^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} = a - bi \Rightarrow t = \beta + \frac{1}{\beta} = 2a \text{ 為一實數}$$

因此有 $10(16a^4 - 20a^2 + 5) + 36a(2a^2 - 1)i = 0$

$$\text{故 } \begin{cases} a = 0 \\ 16a^4 - 20a^2 + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} \\ 16a^4 - 20a^2 + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{矛盾}$$

3. (1) A 點對直線 $L: x = a$ 之對稱點

A' 之坐標為 $(2a - 5, 1)$

$$\Rightarrow \vec{PA'} : x + (5 - a)y - a = 0$$

$\therefore \vec{PA'}$ 與圓 C 相交

$\therefore C$ 到 $\vec{PA'}$ 的距離 ≤ 1

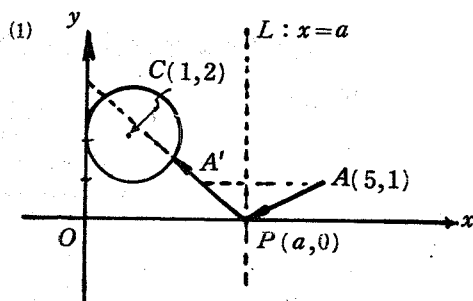
$$\text{故有 } \frac{|1 + 2(5 - a) - a|}{\sqrt{1 + (5 - a)^2}} \leq 1$$

$$\text{即 } |11 - 3a| \leq \sqrt{a^2 - 10a + 26}$$

$$\Rightarrow 121 - 66a + 9a^2 \leq a^2 - 10a + 26$$

$$\Rightarrow 8a^2 - 56a + 95 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{14 - \sqrt{6}}{4} \leq a \leq \frac{14 + \sqrt{6}}{4} \quad (2)$$



(2) A 點對直線 $L: x = a$ 之對稱點為

$A'(2a - 5, 1)$

設 y 軸上之折射點 $Q(0, b)$ $A'(2a - 5, 1)$

則 P 點對直線 $L': y = b$ 之對稱點

為 $P'(a, 2b)$

因此 $\vec{PQ} : bx + ay = ab$

但因 $A'(2a - 5, 1)$ 在直線 $\vec{PQ}$ 上，所以 $b(2a - 5) + a = ab$

$$ab + a - 5b = 0 \quad b = \frac{a}{5 - a}$$

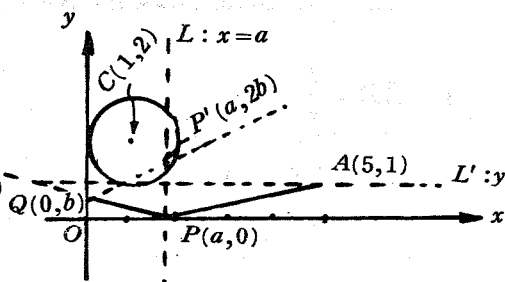
又直線 $\vec{QP'} : bx - ay + ab = 0$

$$\text{即 } \frac{a}{5 - a}x - ay + \frac{a^2}{5 - a} = 0$$

化簡得 $ax - a(5 - a)y + a^2 = 0$

$$x + (a - 5)y + a = 0 \quad (\text{因 } a \text{ 不可能為 } 0)$$

$\therefore \vec{QP'}$ 與圓 C 相交 $\therefore C$ 到 $\vec{QP'}$ 的距離 ≤ 1

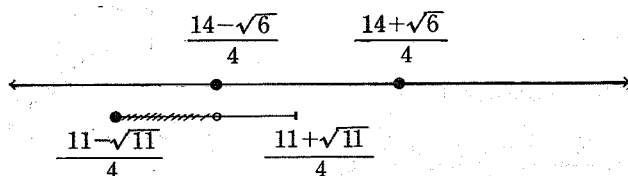


$$\text{故有 } \frac{|1+2(a-5)+a|}{\sqrt{1+(a-5)^2}} \leq 1 \quad \text{即 } |3a-9| \leq \sqrt{a^2-10a+26}$$

$$9a^2 - 54a + 81 \leq a^2 - 10a + 26$$

$$8a^2 - 44a + 55 \leq 0 \Rightarrow \frac{11-\sqrt{11}}{4} \leq a \leq \frac{11+\sqrt{11}}{4}$$

但因經鏡面 x 軸折射後轉而射向鏡面 y 軸，在抵達 y 軸之前不可先觸及圖 C ，
所以有



$$\therefore \frac{11-\sqrt{11}}{4} \leq a < \frac{14-\sqrt{6}}{4}$$

二、花蓮區複賽試題(二)

1. $\overline{AB} = \frac{4}{5}\sqrt{55}$

設 $L: 2x - y + k = 0$ $C_2: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$

$$\text{則 } \left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2 = 25 - \left|\frac{2 \cdot 0 - 0 + k}{\sqrt{5}}\right|^2 = 25 - \frac{k^2}{5}$$

$$\left(\frac{1}{2}\overline{CD}\right)^2 = 16 - \left|\frac{2 \cdot 2 - 1 + k}{\sqrt{5}}\right|^2 = 16 - \frac{(k+3)^2}{5}$$

因 $\overline{AB} = \overline{CD}$

$$\therefore 25 - \frac{k^2}{5} = 16 - \frac{(k+3)^2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{(k+3)^2 - k^2}{5} = 16 - 25 = -9 \quad \text{化簡後得 } k = -9$$

$$\therefore \overline{AB} = 2 \cdot \sqrt{25 - \frac{k^2}{5}} = 2 \cdot \sqrt{25 - \frac{81}{5}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{44}{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{55}$$

2.
$$\frac{225}{\frac{36}{\sqrt{3}} + 16 + 4\pi}$$

設所截成之三段直線之長分別為 a, b, c ，則 $a + b + c = 15$

$$\therefore \triangle \frac{Q}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{6} = \frac{\sqrt{3}a^2}{36}$$

$$\frac{b}{4} \square = \frac{b^2}{16}$$

$$\bigcirc \quad \because 2\pi r = c \quad \therefore r = \frac{c}{2\pi} \Rightarrow \bigcirc = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{c^2}{4\pi^2} = \frac{c^2}{4\pi}$$

$$\therefore A = \triangle + \square + \bigcirc = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}c\right)^2$$

$$\text{由柯西不等式知 } (15)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a \times \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{b}{4} \times 4 + \frac{c}{2\sqrt{\pi}} \times 2\sqrt{\pi}\right)^2$$

$$\leq A \times \left(\frac{36}{\sqrt{3}} + 16 + 4\pi\right)$$

$$\text{故 } A \geq \frac{225}{\frac{36}{\sqrt{3}} + 16 + 4\pi}$$

3. $3\sqrt{3}$

P 在橢圓上 $\therefore \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 10$

$$\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$$

$\triangle F_1PF_2$ 中， $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，由餘弦定理知

$$\begin{aligned} 64 &= \overline{F_1F_2}^2 = \overline{PF_1}^2 + \overline{PF_2}^2 - 2\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} \cdot \cos 60^\circ \\ &= (\overline{PF_1} + \overline{PF_2})^2 - 3\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = 10^2 - 3 \cdot \overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} \end{aligned}$$

$$\text{知：} \overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = \frac{100 - 64}{3} = 12$$

$$\text{又 } \triangle F_1PF_2 = \frac{1}{2} \overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

4. $\frac{1+4\sqrt{2}}{4}$

令 $t = \sin x + \cos x$ 則 $\frac{1}{2} \sin x \cos x = \frac{1}{4} (t^2 - 1)$

故原式可轉化為 $t + \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (t^2 + 4t) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (t+2)^2 - \frac{5}{4}$

$\therefore t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right)$

$\therefore -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \Rightarrow -2-\sqrt{2} \leq t+2 \leq 2+\sqrt{2} \Rightarrow (t+2)^2 \leq 6+4\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} (t+2)^2 - \frac{5}{4} \leq \frac{6+4\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{4} = \frac{1+4\sqrt{2}}{4}$

5. 75 種

(1) 四人名次相同 1 1 1 1 —— 1 種

(2) 三人名次相同 1 1 1 2 —— 4 種

1 2 2 2 —— 4 種

(3) 二人名次相同 1 1 2 2 —— 6 種

1 1 2 3 —— 12 種

1 2 2 3 —— 12 種

1 2 3 3 —— 12 種

(4) 名次各不相同 1 2 3 4 —— 24 種

75 種

6. $2\sqrt{33}$

$\therefore$ 平面 APQ 交球面 S 於一圓，直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 爲此圓之割線， $\overleftrightarrow{PQ}$ 爲其切線。

$\therefore$ 由圓幕定理知 $\overline{PQ}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \sqrt{4^2 + 12^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 9^2 + 3^2}$

$$= \sqrt{176} \sqrt{99} = 4\sqrt{11} \times 3\sqrt{11}$$

$$= 12 \times 11$$

$$\Rightarrow \overline{PQ} = 2\sqrt{33}$$